

Szakdolgozat - Jakucs Rita Mónika

Látássérült diákok a középiskolai matematika világában

Algebra és függvénytan tanítása ép értelmű látássérült személyeknek

2018

Témavezető: dr. Gombás Judit

Eötvös Loránd Tudományegyetem Bárczi Gusztáv Gyógypedagógiai Kar, Budapest,
Ecseri út 3.

látássérültek gyógypedagógiája és tanulásban akadályozottak gyógypedagógiája
szakiránypár

Tartalomjegyzék

Előszó	3
Mi is az a matematika?	7
A matematika eredete	7
A matematika tanítása - nemzetközi kitekintés.....	7
A heurisztikus matematika tanítás.....	8
Látássérült gyermekek és a tanulás	11
Látássérülés.....	11
Látássérülés, mint tanulást meghatározó közeg	12
Látássérült diákok és a matematika.....	13
Látássérült matematikusok.....	13
Az algebra és a függvények világa.....	15
Miért éppen ez a két téma?.....	15
Mi a függvény?.....	16
Interjúk: középiskolát már elvégzett diákok válaszai.....	18
A módszer	18
Gyakorlati kérdések	19
A minta.....	21
Az interjú tapasztalatai	22
Gyakorlati kérdések tapasztalatai	23
Diskusszió	24
Problémák és megoldások	27
Hogyan befolyásolja a verbalizmus a tanulást?.....	27
Függvények világában	28
Mások módszerei	28
Lineáris függvények.....	28
Nem lineáris függvények – a parabola.....	31
Hogyan használjuk ki a parabola kirakásának lehetőségét?	32
Algebra világa.....	34
Nevezetes azonosságok	34
Abakusz analógia.....	35
Manuálisan – gyufásdoboz módszer.....	36
Zárszó	39
Bibliográfia	40
Kérdések - utólag beletéve	42

Előszó

„Bizonyítsuk be, hogy a következő számok irracionálisak!” Olvassuk felmerülő feladatként a tizedik osztályos Sokszínű matematika című tankönyvben, miután a $\sqrt{2}$ -ről a tankönyv bemutatja a bizonyítás menetét. Közepesen hosszan kifejtve a legismertebb indirekt bizonyítás így néz ki nyomtatásban:

Tegyük fel, hogy $\sqrt{2}$ racionális! Ebben az esetben van két olyan egész szám, a és b , melyek hányadosa $\sqrt{2}$. Válasszuk ki a -t és b -t úgy, hogy ezek relatív prímek legyenek (legnagyobb közös osztójuk az 1)!

$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ / Emeljünk négyzetre!

$2 = \frac{a^2}{b^2}$ / Most szorozzunk b^2 -tel!

$2b^2 = a^2$ / Az egyenlet bal oldala osztható 2-vel, tehát a jobb oldalnak is oszthatónak kell lennie 2-vel. Ez esetben a^2 osztható 2-vel, tehát a osztható 2-vel, akkor a^2 osztható 4-gyel. Ha az egyenlet jobb oldala osztható négygyel, akkor a bal oldal is osztható négygyel.

$2b^2$ osztható négygyel, akkor b^2 osztható kettővel, tehát b is osztható kettővel. Tehát a és b is osztható kettővel. Ezzel ellentmondásra jutottunk ekvivalens átalakításokat végezve, tehát a feltett állítás hamis.

Hogy néz ki ez egy látó gyerek füzetében? Nagyjából öt sorban leírható a megfelelő jelölések használatával. Ugyanezen jelölések txt-ben nem használhatók, ott betűvel kell írni a megfelelő szavakat. Braille-ben ugyan léteznek a halmazelmélet, sőt, a geometria szakszavainak jelölésére alkalmas jelkombinációk is, ám ezeket igen kevesen ismerik, nem is tanítják. Nem is igen használná senki, a látássérült tanulók a **Vak gyermek az iskolában** című kiadás alapján legkésőbb 8. osztály 2. félévében áttérnek a számítógépre, középiskolai tanulmányaikra felkészülvén. (Brumbauer és Harmath, 2014). Ám a megfelelő rövidítések használata nélkül egy gépelt szöveg is lényegesen hosszabbra nyúlhat, mely leírása rengeteg időt vesz el, időt, mikor a diák nem az órára figyel.

Nézzünk egy másik példát, vegyünk egy grafikusan megoldható egyenletet!

$2x - 4 = -\frac{x}{3} + 3$, egy látó gyerek füzetében a képen látható ábra jelenik meg, melyről ránézésre leolvasható $x=3$. Ez látható a jobb oldali képen. Egy súlyos fokban látássérült diák kezében nincs meg a grafikus egyenletmegoldás eszköze, sőt, a szövegszerkesztő egyenlet formátuma sem, tehát a gépén a bal oldali szöveg látható.

$$2x - 4 = -x/3 + 3 \quad / *3$$

$$6x - 12 = -x + 9 \quad / +x$$

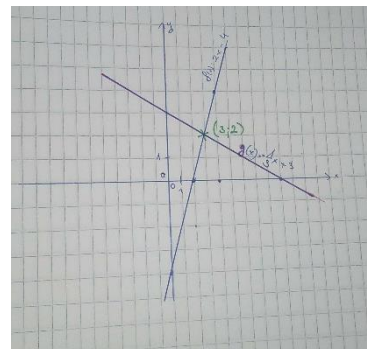
$$7x - 12 = 9 \quad / +12$$

$$7x = 21 \quad / :3$$

$x=3$ majd ezek után ellenőriz:

$$2*3-4=? -3/3+3$$

$2=2$, tehát az eredmény jó.



1. ábra - Grafikus egyenletmegoldás látóként

Itt már komolyabb különbség mutatkozik. Ez természetesen nem alátámasztott mérés, de annyit megmutat, a látássérült diáknak sokkal több dolga van a manuális jegyzeteléssel olyan tárgyaknál, ahol a képletek fontosak, mint az ép látású társaiknak. Miközben megismerésük más fejlődési üteme és a vizuális megismerés nehezítettsége miatt (lásd pl. Pajor, 2017) épp tanulásuk más aspektusait volna érdemes erősíteni.

Most térjünk vissza egy pillanatra az első feladatra: $\sqrt{2}$ irracionalitása. Egy gondolkodásra szoktatott nyolcadik osztályos diáknak már nem okoz gondot a feladat, bár felső tagozaton egy könnyebben átlátható bizonyítást nézünk:

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \quad / \text{Emeljünk négyzetre!}$$

$$2 = \frac{a^2}{b^2} \quad / \text{Most szorozzunk } b^2\text{-tel!}$$

$2b^2 = a^2$. b^2 és a^2 is négyzetszám, tehát prímtényezősz felbontásukban a kettesek száma páros. Az egyenlet bal oldalán látunk még egy kettes szorzót, tehát a bal oldalon összesen páratlan számú kettes van, a jobb oldalon páros. Ezzel ellentmondásra jutottunk.

Sőt, egy nyolcadikos diák, aki egy kevéskét tovább gondolkodik, rájön, hogy ha a egész szám, akkor $\sqrt{a}$ egész, vagy irracionális.

Mivel a matematika mindig közel állt hozzám, gimnáziumban az akkor még Pósa Lajos, azóta névleg és finanszírozásilag A Gondolkodás Öröme Alapítvány által szervezett tehetséggondozó matematika táborok rendszeres résztvevője voltam és volt szerencsém az ország legkiválóbb matematika tanárainak keze alatt nevelkedni, így kézenfekvőnek tűnt e tárggyal kapcsolatban írni. Segítette a választásom a tény, hogy egy éven keresztül tanítottam matematikát gimnáziumban integráltan tanuló vak diákoknak és hogy a témában igen kevés kézzel fogható anyag állt rendelkezésemre.

Munkám során, melyet eredetileg kéttanáros modellben az osztályt egyébként tanító pedagógussal kezdtem, hamar kiderült, hogy a diákok az óra első öt perce alatt lemaradnak, és az addig az évből eltelt közel 4 hónap során tulajdonképpen nem sokat tanultak matematikából, hiszen csak írták, amit a tanár jobb híján diktált. Itt megjegyzem, hogy a pedagógus saját bevallása szerint nemcsak nem tanult semmit tanulmányai során sajátos nevelési igényű diákokról, de tulajdonképpen frissdiplomásként kapott egy minden szempontból nehéz osztályt, három integráltan tanuló vak diákkal. Nem volt könnyű dolga és nem hibáztatható kizárólagosan a diákok eredménytelenségéért. Mivel a látássérült diákok azonnal lemaradtak, lényegében folyamatosan, párhuzamosan beszélünk az őket tanító tanárral, és még így sem tanultak sokat. Végighallgatni a hatvanadik megoldásmenetet úgy, hogy a feladatot értelmezni sem volt idejük – ekkor még az óra követése volt a cél - semmit nem oldott meg a matematikát övező problémáik közül. Ezt orvosolandó átálltunk szegregált matematika órák tartására, ahol a többségi pedagógus tanította a látó diákokat, én pedig a vak tanulókat. Tapasztalatom alapján megijesztette őket minden feladat, amiben gondolkodásra kellett támaszkodni, sokszor a megfelelő műveletet sem találták meg. Az olvasott szöveg matematikai jelekké történő alakítása komoly gondokat okozott. Ezek után rettentő hosszú ideig tartott a feladatok megoldásának lejegyzése, illetve az egyenletrendezések technikailag okoztak nehézséget. Ezek egyike sem olyan kérdés, amire egy gimnáziumi oktatás keretei közt azt mondhatnánk, hogy problémamentes, ezeken változtatni kell.

Szakedolgozatomban igyekszem majd megoldást találni a látássérült diákok nehézségeinek legalább részleges leküzdésére főleg matematika tárgy algebra és függvénytan témaköréből. Ugyan szakedolgozatom témája a matematika, de jelzem, a tárgy és a választott témakörök szorosan kapcsolódnak mind a kémia, mind a fizika tárgyakhoz. Bár e két tantárgy általában ha egyáltalán épül tapasztalatszerzésre, a kísérletek merőben vizuális természetűek, nagy részük pedig egyenletrendezés - így támogatásuk igen fontos volna látássérült diákok számára.

Mivel a függvénytan egy mindent átható téma és a gimnáziumot lezáró érettségit lényegében esélytelen teljesíteni a függvények ismerete nélkül, választásom – a számomra igen kedves geometria helyett erre a témakörre esett. Bár a geometria személyesen nálam előnyt élvez a matematika többi területe közt, azt gondolom, a beható ismerete nélkül le lehet jól érettségizni. Ugyanez nem mondható el a függvénytanról.

Ezzel kapcsolatban interjúkat készítettem a középiskolát már elvégzett látássérült fiatalokkal, ezzel alátámasztva a jelenlegi rendszer problémásságát. Kutatásom célja a középiskolai matematika oktatásuk eredményességének mérése volt. Hipotézisem, hogy a látássérült diákok oktatásában döntő szerepe volna a gondolkodás tanításának, a heurisztikus matematika oktatásnak. Mivel jelen dolgozat kereteinél lényegesen nagyobb téma volna a teljes középiskolai tananyag átdolgozása, a továbbiakban két, a középszintű érettségi letételéhez elengedhetetlen témát látunk majd, gondolkodásra sarkallva, látássérülés-specifikusan.

Mi is az a matematika?

A matematika eredete

A matematika eredetéről Sain Márton (1986) a **Nincs királyi út!** című matematikatörténeti művében egyidőre teszi az ember földművelő életmódra térésével, tehát i.e. 10000 és 3000 közötti időszakra teszi. Számírás tulajdonképpen az első írásokkal egyszerre, i.e. 4000-3000 között jelent meg, először számokat jelölő írásjelek, majd számjegyek formájában. Számoláshoz segítséget nyújtottak a kezek, a lábak, máshol eszközök – kialakultak a számrendszerek. Az első a Mezopotámiához kötődő 60-as számrendszer volt. Ezt bizonyos helyzetekben, például szögtartomány vagy idő mérésénél ma is használjuk.

A matematika tanítása - nemzetközi kitekintés

Gosztonyi Katalin doktori disszertációjában (2015) a matematikaoktatás reformjának kezdetét a 20. század közepére teszi. A matematika kutatás a szerző szerint a 19. század legvégén indult ugrásszerű fejlődésnek, a huszadik század magyar matematikusai között bőven találunk világszínvonalú, sokat hivatkozott eredményeket. E változás is politikai gyökerekre vezethető vissza, a magyar reformokat részben a nemzetközi New Math mozgalomhoz hasonlítja. Az első Szputnyik fellövése (1957) után a nyugati világ és az Amerikai Egyesült Államok – attól tartva, lemarad, arra a döntésre jutott, ennek elkerülése a természettudományok és a matematika oktatásának fejlesztésén át valósítható meg. Ezzel párhuzamosan a huszadik század közepére a kor matematikusai, matematika tanárai is felszólaltak az elavult oktatási keretek ellen. Az új módszer alapjául világszerte a Bourbaki-csoport művét vették, ezen kívül hatást gyakorolt Jean Piaget munkássága a emberi gondolkodási struktúrákról. Mind a New Math, mind a magyar reformok aktív pedagógiára való igényének köszönhetjük a 60-as 70-es évek máig használt játékait: a logikai készletet vagy Dienes professzor játékait.

A heurisztikus matematika tanítás

1946-ban, a háborút követően az általános iskolát egységessé tették. Gosztonyi (2015) szerint az oktatási reform elsődleges célja a rendszer demokratikusabbá tétele volt, majd ezt követően lassú de biztos liberalizáció figyelhető meg az iskolákban (Báthori, 2001, id. Gosztonyi, 2015). Erre a reformra és a Franciaországban végbemenő hasonló változásra hivatkozik Varga Tamás, mint saját programja meghatározó elemeire. Varga úttörőként a hatvanas években „rugalmas, a tanulók szükségleteihez igazodó tantervre, differenciálásra és az egyéni különbségek figyelembe vételére törekszik.” (Gosztonyi, 2015, p. 35.).

A magyarországi mozgalmat Varga nevével fémjelezzük, ám rá nagy hatással volt többek között Pólya György, Karácsony Sándor, Kalmár László és Rényi Alfréd. Hatással volt rá továbbá Dienes Zoltán előadássorozata (1960) és az UNESCO szimpóziuma (1962), ahol Varga megismerte a New Math mozgalmat, illetve a franciaországi reformok mozgatórugóit. (Gosztonyi, 2015).

A hatvanas években indult törekvés célja a matematika oktatást a gondolkodás oktatásává változtatni. Első kísérlete komplex matematikaoktatás néven 1963-ban indul, két általános iskolai osztály részvételével, majd egyre több és több osztály, iskola bevonásával zajlott. Csatlakozott Vargához a Matematikai Kutatóintézetben (ma: Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet) többek közt C. Neményi Eszter, akinek alsó tagozatos tankönyvét pár éve törölték az első osztályosok számára rendelhető tankönyvek közül.

Varga mozgalma olyannyira volt sikeresnek tekinthető, hogy a kor több párhuzamosan futó reformkísérleti program alakja közül őt kérték fel az új tanterv megszerkesztésére. 1972-es elkészülte után lassan kerül bevezetésre, 1978-ra lesz minden iskolában kötelező érvényű. Gosztonyi 2013-ban Halmos Máriával, Kovács Csongornéval és Csahóczi Erzsébettel készített interjúja alapján a mi diákkorunk nagy matematika tanárai korlátozottan látják sikeresnek az azóta sok változtatáson átesett tantervet, Varga egykori kollégái szerint a részleges kudarc oka a pedagógusok felkészületlenségében inkább keresendő, mint a rendszer hibáiban. Ezek kiküszöbölésére az 1980-as évektől kompromisszumokat vezetnek be. (Gosztonyi, 2015).

Napjainkban a pedagógusok számára elérhető tankönyvcsaládok közt szerepel a közkedvelt és az Előszóban idézett Sokszínű matematika, mely felépítése tulajdonképpen a következő: a fejezetek elején rövid szövegben ismerteti az anyagot, majd példafeladatokon bemutatja, hogyan kell alkalmazni az épp tanult megoldási menetet, majd 10-15 gyakorló feladatot ad (lényegi változtatás nélkül), majd egy, esetleg két gondolkodtató feladat következik, melyeket a lap legalján, külön színnel jelöl ezzel is jól elkülönítve az „átlagos” tanulóknak szánt feladatoktól. Pedig pár éve kísérletezem már ezzel: a matematikában nem kifejezetten (vagy kifejezetten nem) tehetséges tanulók számára is megoldhatók a feladatok, amint megtanulnak gondolkodni. Itt megjegyzem, hogy személyes beszélgetésből úgy tudom, a szerző elkötelezett híve a heurisztikus matematika oktatásnak, ám ez sajnálatos módon a könyvben nem jelenik meg kellőképpen.

Ezt a fajta mentalitást, miszerint a matematika kizárólag megtanult algoritmusok felhasználása volna, próbálja felváltani a felfedezettő matematika, mely célja tulajdonképpen a diákok gondolkodásra sarkallása. Módszerükkel lehetőség nyílik a matematika tág határokon belül történő önálló megismerésére.

Pólya György a *Mit adjon a középiskola a tanulóknak?* kérdésre így válaszol **A problémamegoldás iskolája** című művében:

„Minden ismeretünknek tárgyi tudás és gondolkodási készség az alapja. Ha valódi és alapos ismeretünk van a matematikai munka bármely fokáról, legyen az elemi vagy felső fokú, kétségtelenül világossá válik, hogy a matematikában a gondolkodási készség sokkal fontosabb, mint a tárgyi ismeretek elsajátítása.” (Pólya, 1985, p.11.) Majd hozzáteszi, a diákoknak késznek kell lenni nem csak rutinproblémák, de olyan feladatok megoldására is, ami a diáktól önállóságot, eredetiséget, alkotókészséget és ítéltőképesseget vár el. (Pólya, 1985)

Egy általam igen nagyra tartott mesterpedagógus a fent idézett könyvet ezzel bocsájtotta rendelkezésemre: „Kezeld úgy, mint a Bibliát és kérem vissza. Bármilyen más könyvet örökbe is odaadok, de ezt nem.” Számomra ez már önmagában elég lenne Pólya szavainak komolyan vételére. A felfedezettés olyan utat nyit meg a tanulók számára, mely nem korlátozódik az iskola világára. Természetesen a középszintű érettségig le lehet tenni pusztán rutinfeladatok ismeretével, ám a matematika

szépségét meglátni az fogja, aki maga jön rá a megoldási menetekre. Így írásom alapját a heurisztikus matematika oktatás nagy alakjainak szavai adják.

Látássérült gyermekek és a tanulás

Látássérülés

A látássérülésre több különböző szempontból tekinthetünk (Pajor, 2017).

Orvosi szempontból látássérült, „akinek szemészeti állapota a normálistól tartós eltérést mutat, függetlenül ennek súlyosságától” (Kovács, 2002, id. Pajor, 2017, p.29)

Szociológiai szempontból relatív és abszolút fogyatékoságot különböztetünk meg (Bánfalvy, 2006 idézi Pajor, 2017), munkaügyi értelemben bizonyos szakmák betöltéséhez való alkalmasság kizáró kritériuma a látássérülés megléte (pl. úrhajós nem lehet), jogi szempontból a definícióra „büntethetőség, a felelősség megállapítása, vagy valamilyen kedvezmény igénybevételére való jogosultság miatt van szükség” (Kovács, 2000, id. Pajor, 2017, p.30). Pedagógiai szempontból látássérült az a diák, aki látássérülése súlyossága folytán adaptált környezetben, csak speciális eszközök, módszerek alkalmazásával képes optimálisan tanulni, fejlődni. (Pajor, 2017)

Léteznek hagyományos és funkcionális definíciók. Hagományos például a WHO (World Health Organization) BNO-9 definíciója:

„Látássérültnek tekinthető az a személy, akinek jobbik szemén maximális korrekcióval mérhető látásélessége az ép látás 30%-a ($V:0,3$), vagy ennél kevesebb, illetve látótere nem több 20° -nál.” (Kovács, 2000, id. Pajor, 2017, p.30-31).

Ez, és az ehhez hasonló hagyományos definícióknak több hiányossága is van. A látóteren és a vízuson kívüli látási funkciókat nem említik, habár pl. a fényérzékenység, kontrasztérzékenység sérült volta hasonlóképp megnehezítheti az ember életét, mint a látótérkiesés. Nem tesznek különbséget közeli vagy távoli vízus közt, látótér sérülését kizárólag perifériás sérülésként kezelik. Az agyi feldolgozás zavarát egészen kihagyják. (Pajor, 2017)

Funkcionális definíció pl. Hyvärinen (1997) definíciója, mely tulajdonképpen hat kategóriára osztja az embereket látásuk alapján (Pajor, 2017):

- fényérzés nincs: ők kizárólag vakos technikákat alkalmazva élik életük
- fényérzés, de képzet szintjén nem kimutatható: főleg vakos technikákat alkalmazva, tájékozódásban némi látásmaradványt fölhasználva működnek.

- fényérzés, mely képzet szintjén kimutatható: Braille olvasás, mindennapos tevékenységben látásra is támaszkodnak, tanulásban egyszerű, kontrasztos ábrákat értelmeznek
- formafelismerés és mérhető látásélesség ($V < 0,05$): egyéni igények szerinti életvitel, tanulás jellemzi őket.
- látásélesség $< 0,05$; felső határ nincs.
- ép látás: aki gyógypedagógiai megsegítést nem igényel.

Jelenleg WHO 2006-os, kategorizáló definíció van életben, vagyis:

„A látássérülés 5 kategóriát tartalmaz, amelyek két csoportba sorolhatóak. A mérsékelt és súlyos látássérülés 0,3 és 0,05 vízus közé esik. A vakság három kategóriát tartalmaz, ahol a látásélesség 0,05 vízusérték alatti, vagy a centrális látótér 10° , illetve annál kevesebb. A látásélesség és a látótér mindig a maximálisan korrigált jobbik szemén mért érték” (WHO, idézi Pajor, 2017).

Látássérülés, mint tanulást meghatározó közeg

Látássérült gyermekek számára módszertani oktatási segédanyag, könyv vagy kiadvány felső tagozatig található meg magyar nyelven. Csocsán Emmy (2014) a vakságról, mint a tanulást befolyásoló közegről beszél a **Vak gyermek matematika tanulása, tanítása** című művében. Hogyan értsük ezt?

Csocsán (1994) alapján a súlyos fokban látássérült személyek környezetünk elemeinek tulajdonságait éppúgy képesek elsajátítani, mint látó társaik, ám maga a megismerés, a fogalmak szilárdulása, az absztrakció menete eltérő.

Pajor szerint (2017) látássérült gyermekkel való munkát leginkább a mozgásos tapasztalatok hiánya vagy kevésbé kialakult volta nehezíti, befolyásolva a testsémát, téri tájékozódást, saját test megismerését. A látássérült gyermekek kevesebbet manipulálnak, hiszen kevesebb tárggyal találkoznak, ez hiányos fogalmakhoz, gyengébb finommotorikához vezet. A látássérülés nem a kognitív képességeket vagy a tanulás folyamatát változtatja meg, hanem az észlelés, megismerő funkciók változtatásán át vezet „átlagostól eltérő, lassabb” fejlődési ütemhez (Pajor, 2017. p 107).

Nyilvánvalóan a fogalmak egy része létrejöhet tapasztalati úton vak gyermekek esetében is, bár az elsődleges információt szolgáltató tulajdonság nem az alak lesz,

mint látó gyermekeknél, hanem pl. a hang vagy a felület (lásd pl. Pálhegyi, 1981). Ám számtalan példát tudunk mutatni olyan tárgyakra is, amit nem lehet kézbe adni. Gondoljunk egy 10 emeletes panel épületre, vagy egy helikopterre, egy megközelíthetetlen állatra – például oroszlánra. A gyermeknek utóbbiakból megmarad a hangja, a lift vagy lépcső hossza, de egyéb benyomása csak igen szerencsés esetben támad. Emellett a szavakat, beszédet hallja és utánozza, szókészletében megjelennek szavak, melyeknek nem lesz konkrét, teljes értelme számára, csak nagyvonalakban van elképzelése azok jelentéséről. Ezt a jelenséget nevezik verbalizmusnak. (Csocsán, 1994.) Ezen jelenség kerülése, a fogalmak tartalommal telítése kiemelt feladatunk.

Látássérült diákok és a matematika

Vak diákok egy jelentős hányada igen megszenved a matematikaórák és a követelmény teljesítésével. Többnyire lényegesen kevesebb feladattal végeznek egy óra alatt, mint egy látó diák, vagy akár egy gyengénlátó tanuló. Jellemzően gyorsan és pontosan képesek megtanulni fejben számolni, hajlamosak a megismert stratégiák alkalmazására rugalmas gondolkodás, és a feladathoz legalkalmasabb megoldási mód megkeresése helyett. (Csocsán, 1994).

Látássérült matematikusok

A kételyeket, miszerint a matematika eredendően nem való látássérült személyeknek, most egyszer s mindenkorra szeretném eloszlatni. Ugyan írásom nem arról szól, amikor jól működik a rendszer és az egyszeri diákból, aki történetesen vak, matematikus lesz, fontosnak tartom érzékeltetni, hogy ez nem egy egyedülálló eset, ilyen létezik. Nem célom matematikust nevelni minden látássérült diákból, de célom értő és a matematikára nem, mint mumusra néző és attól rettegő diákokat látni.

Kezdetnek például Eulernek (1707-1787), akit Allyn Jackson a valaha élt egyik legnagyobb matematikusnak nevez, 31 éves korától voltak problémái egyik szemével, majd élete utolsó 17 évére megvakult. Az ő nevéhez köthető többek közt bizonyos tulajdonságú poliéderek (síklapok által határolt testek) lapjai, élei és csúcsai közötti

összefüggés meglátása és bizonyítása, de megvakulása után évekkel adott ki egy 775 oldalas kötetet a Hold mozgásáról (O'Connor & Robertson, 1998). Nicolas Saunderson (1682-1739) algebrai kutatásokat folytatott, egy éves korától volt vak. Bernard Morin (1931-) 6 éves korában vakult meg glaucoma és retinaleválást követően. Az ő érdeme a topológiához köthető, Stephen Smale 1959-ben bizonyította, hogy az n -dimenziós gömbök euklideszi térbe való immerziói regulárisan homotópok. (Jackson, 2002). Arra, hogy ez pontosan mit jelent, e dolgozatban nem térek ki, de ebből következik, hogy a gömb törés, szakítás, tehát keletkező él vagy lyukasztás nélkül kifordítható, ha a felszíne átmetszheti önmagát. Ez egy igen szemléletellenes tétel, nem csoda, hogy Smale témavezetője, látva a hibátlan bizonyítást hibásnak feltételezte azt, pontosan erre hivatkozva. Ám a hiba nem lett meg, a bizonyítás helytálló. Sokáig viszont eszköz nem volt ennek szemléltetésére. Morin nevéhez az eszköz köthető, ami megmutatja a gömb kifordítását.

Az algebra és a függvények világa

Miért éppen ez a két téma?

Először is fontosnak érzem tisztázni az algebra és a függvénytan összefüggését középiskolai matematika szempontjából. Ehhez vegyünk egy egyszerű, egyismeretlenes egyenletet, például ezt:

$$2x + 3 = 4x - 5$$

Algebrai úton ezt az egyenletet a diák feltehetően úgy oldja meg, hogy hozzáad 5-öt és elvesz $2x$ -et, majd leoszt 2-vel:

$$8 = 2x \quad / : 2$$

$$4 = x$$

Ugyanezt a példát a függvényekről tanultak bevetésével is leküzdheti a tanuló, mégpedig grafikus egyenletmegoldás útján, melyet a középszintű érettségi megoldókulcsa egyenértékűnek tekint az algebrai megoldással (lásd középszintű érettségi megoldókulcs, 2017, II. rész, 13. feladat c rész első megoldás). Ebben az esetben a diák ábrázolja az $y = 2x + 3$ és az $y = 4x - 5$ függvényeket egyazon koordináta-rendszerben és a metszéspontjuk x koordinátáját leolvassa készen van a feladattal.

Középiskolában általában hangsúlyosan olyan függvényekkel foglalkozunk, aminek hozzárendelési szabálya egyenlettel leírható, mivel az érettségi teljesítésének ez szükséges feltétele, bár itt megjegyzem, hogy a függvény definíciója ennél sokkal többet enged – például függvény az a hozzárendelés is, amit úgy kapunk, hogy a racionális pontokban 0-t, az irracionális pontokban +1-et vesz fel (Dirichlet függvény).

De maradjunk az egyenlettel megadható függvények körében, hiszen az alapszintű tananyag - feladatmegoldási szinten ez része. Algebrai feladatot lehet, sőt, sok esetben ügyesebb grafikusán megoldani, bonyolultabb függvénytan problémákat pedig általában az algebra segítségével oldunk meg. Mivel tehát ilyen típusú függvényeket nézünk, világos, a két téma szorosan összefügg. Ezt alátámasztandó beszélgetést folytattam Jakucs Erikával, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium vezető matematikatanárával.

Nézzük meg a 2017-es tavaszi középszintű matematika érettségít! Az első rész negyedik, ötödik, nyolcadik, tizedik és tizenegyedik feladata algebra/függvények témakör. Ez a 12 feladatból 5, pontszámokat nézve pedig hibátlan teljesítésük 30-ból 10 pontot ér. Ha célunk a látássérült emberek teljes inklúziója, feladatunk olyan háttérrel és eszközöket biztosítani, amivel a többségi társadalomban képességeikhez mértén részt tudnak venni. Aki képes arra, hogy teljesítse írásban (számítógéppel) az érettségít, attól ne vegyük el a lehetőséget! Felmentés helyett inkább tanítsuk értelmesen!

Mi a függvény?

A függvényeket az ember már igen régen kutatta. Sain Márton (1986) ide sorolja az ógörögök és középkori társadalmak különböző rendszereit, táblázatait. Az első definíciót azonban Descartes nevéhez kötjük, mi alapján a függvény megfeleltetés. Később Leibniz egy szűkebb értelmezést használt, ő vezette be a függvény kifejezést. A XVII.-XVIII. század fordulója környékétől tekintették a függvénynek azt az analitikus leírást, ami kifejezi a kapcsolatot a változók és állandók közt. Az fx , $f(x)$ kiírást Euler kezdte használni, szerinte „függvényen értjük a változók és a konstansok közötti kapcsolatot leíró kifejezést, ha az analitikus műveleteket (négy alapl művelet, hatványozás, gyökvonás, sorbafejtés, differenciálás, integrálás) tartalmaz” (Sain, 1986, p.698). Ez a valós függvénytanak még mindig csak kis szelete – többek közt kizárja azokat a függvényeket, amiknek grafikonját mondjuk szabad kézzel húzott vonal alkotja. A téma történeti alakulását lásd Sain M. **Nincs királyi út!** című művében.

Különbözö iskolai szinten különbözö munkadefiníciót alkalmazunk. Bár a függvény, mint fogalom, csak hetedik osztályban kerül elő és utána tisztul egyetemi szintű fogalomalkotásig, egyértelmű hozzárendeléssel a tanulók már első osztályban találkoznak, például Mit csinálhat a gép? típusú játékok formájában (ld. pl. C. Neményi E. & Sz. Oravecz M. Matematika tankönyvében). A gyerekek betűk (pl. ékezetes betűhöz rendeli annak ékezet nélküli párját), szavak (pl. szavakhoz a visszafelé olvasott formáját) és később számok (számhoz rendel számot) egyszerű szabály alapján történő egymáshoz rendelését tanulják, tapasztalják.

Az Apáczai Kiadó hetedik osztályosoknak szóló matematika tankönyve a függvény fogalom bevezetésénél először definiálja az egyértelmű megfeleltetést: „Ha az

alaphalmaz minden eleméhez pontosan egy elemet rendelünk hozzá” a képhalmazból, „akkor a megfeleltetést egyértelmű megfeleltetésnek nevezzük.” (Csahóczy et al, 2012), majd megadja a függvényt: „Függvénynek nevezzük az egyértelmű hozzárendelést két nem üres halmaz elemei között. A kiinduló halmazt alaphalmaznak nevezzük, és általában A-val jelöljük. A másik halmazt képhalmaznak hívjuk, és K-val jelöljük. A két halmaz szerepe nem felcserélhető.”

Látóként a mindannyiunk által ismert derékszögű koordinátarendszert használjuk. Vak diákok számára maga a függvényábrázolás részben megoldott, legalábbis eszköz létezik hozzá. A koordináta tábla alkalmas egész koordinátájú pontok ábrázolására a hozzá alkalmas gombostű-szerű tárgyakkal – továbbiakban gomba. Ugyan rengeteget segít a vak diákok helyzetén, mégsem oldja meg a problémák nagy részét. Sajnos sokszor az eszközhasználatot mellőzik, pedig Pajor (2017) szerint mind a gyengénlátó, mind a súlyos fokban látássérült tanulók esetében minden érzékszerven át kell biztosítani a tanulás lehetőségét, a fejlődés csak így lesz optimális.

Interjúk: középiskolát már elvégzett diákok válaszai

A módszer

Kvalitatív kutatási módszert választottam, mert alapvetően célom az általam érzékelt problémák hátterét, minél mélyebben megérteni a középiskolás látássérült diákok matematikával kapcsolatos világát. Célom nem statisztikai eredmények közzétele volt, hanem felmerülő problémák részletes ismertetése. Kutatásban félig strukturált interjút vettem fel, tehát az előzetesen megalkotott kérdéseken indulva bizonyos esetekben visszakérdeztem, az interjúalanyoknak lehetősége nyílt egy-egy gondolatukon elindulva az eredeti kérdésnél lényegesen részletesebben és egyéb információkra kitérően választ adni (kutatásmódszertani háttérrel lásd pl. Molnár, 2010).

Az interjúk az alanyok előzetes beleegyezésével kerültek rögzítésre és a felhasználás körülményeiről minden résztvevő pontos tájékoztatást kapott. Beazonosíthatóságuk elkerülése érdekében a helységek nevét megyenévre cseréltem, az iskolák neveit töröltem, saját nevüket természetesen nem közlöm. A városnevek törlését a populáció mérete miatt láttam indokoltnak.

Kutatási kérdéseim a következők voltak: Hogyan érezték magukat a látássérült diákok a matematika órákon? Reális-e a saját tudásukról való tudásuk? Képesek-e önálló feladatmegoldásra, ha az lehet sikeres csupán algoritmusok használatával? Képesek-e önálló feladatmegoldásra olyan feladatban, ahol algoritmusok használata nem elég?

Hipotézisem volt:

1. Azt vártam, többségében nem érezték magukat jól a matematika órákon, kivéve azokat, akiket felmentettek, így többségében arra számítottam, saját tudásukhoz pesszimistán állnak majd.
2. Arra számítottam, a látássérült diákok - azok is, akik a matematikával jegyeik alapján gimnáziumban jól boldogultak és a tárggyal jó vagy legalább nem rossz kapcsolatuk volt - nem lesznek sikeresek a feladatok végrehajtásában.
3. Azt feltételeztem, algebra feladatom nagyjából 60-70%-ban teljesíteni tudják majd, a koordinátarendszeres feladatnál arra számítottam, hogy a végtelen megoldás mindenkinek meglesz, a nulla 2-3 embernek és nem lesz, aki megtalálja (jó, vagy legalább elfogadható indoklással) az egy metszéspontot (feladatot és megoldást lásd lent). Feltételeztem, lesz, aki megpróbálja majd

leszámlálni az általa kirakott rácspontokat, tehát nincs tisztában a koordináta rendszer kiterjedésével, és nem lesz, aki tudná bizonyítani, hogy amennyiben van 2 metszéspont, akkor van végtelen sok. Ezutóbbi nem is egy könnyű gondolat, de általános iskola felső tagozatos tananyag használatával bizonyítható.

4. Hipotézisem volt, hogy a látássérülteket tanító tanárok egy része igen segítőkész, bár nem találja a jó módszert (amiért nehezen hibáztatható, hiszen másik szakma), másik jelentős része viszont megpróbálja a teljes egészében látássérülésre fogni diákja eredménytelenségét, és mindent megtesz, hogy neki ne is legyen ezzel több feladata.

A feladatmegoldáshoz síkírást használó interjúalanyaim számára adott volt saját füzetük illetve íróeszközük, a legmegfelelőbb láthatóság biztosítása érdekében. Főleg tapintva tanuló alanyok számára adott volt saját számítógépük, melyre interneten vagy pendrive-on kapták meg a megoldandó algebra feladatot txt formátumban, illetve koordináta tábla és gombok.

Mivel az önértékelés ingoványos talaj, és kutatási kérdéseim közé tartozott működése, ezért az interjúban két feladat megoldását is kértem. Ezek egyike kizárólag iskolai tanulmányokra épít, algoritmusok használatával is teljesíthető. A másik feladat kifejezetten azt volt hivatott mérni, a diákok el tudnak-e egyáltalán kezdeni gondolkodni, vagy rávágják az első gondolatot, ami eszükbe jut, illetve hogy a rendelkezésre álló eszközöket hogyan hasznosítják.

Gyakorlati kérdések

1. Az interjúban két gyakorlati kérdés jelent meg, mégpedig:
Oldd meg a $3 * (x - 3) + (5 + x) * (x + 1) = (x + 4)^2$ egyenletet (valós számok halmazán)!
2. Egy egyenes hány rácsponton mehet át a derékszögű koordinátarendszerben?

Az első feladat saját feladatom, elvárt megoldásmenete a következő, az ellenőrzést ki nem felejtve – mivel nem volt céloom számolási képességek mérése, ellenőrzésnek elfogadtam azt is, ha az interjúalany egyértelművé tette szándékát de annak kivitelezésében nehézsége akadt.

$$3 * (x - 3) + (5 + x) * (x + 1) = (x + 4)^2$$

$$3x - 9 + 5x + 5 + x^2 + x = x^2 + 8x + 16$$

$$9x - 4 = 8x + 16$$

$$x = 20.$$

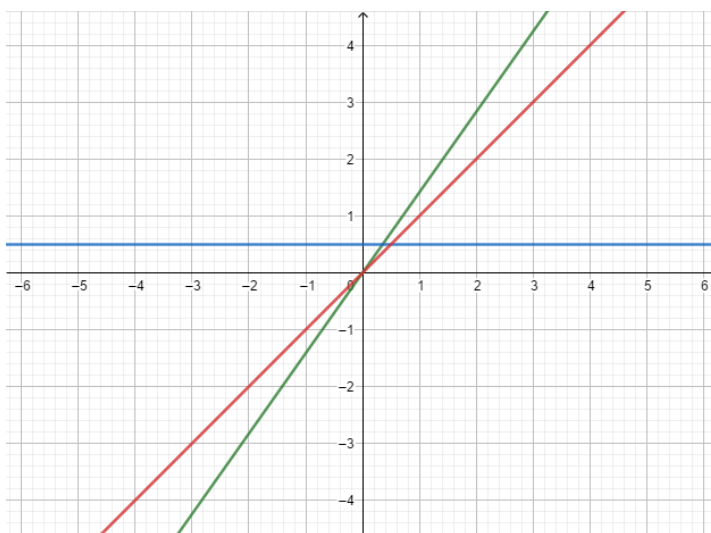
Ellenőrzés:

$$3 * (20 - 3) + (5 + 20) * (20 + 1) = (20 + 4)^2$$

$$3 * 17 + 25 * 21 = 24^2$$

$$51 + 525 = 576$$

A második feladatot Pósa Lajos (ma: A Gondolkodás Öröme Alapítvány) hétvégi matematikátáborából ismerem, a feladat szerzőjének szóbeli engedélyével használtam föl. Három megoldásra kell gondolni: 0, 1 és végtelensok (megszámlálhatóan végtelen – ezt a fogalmat nem vártam el a kutatásban) metszéspont



2. ábra - 2. feladat megoldásainak egy-egy példája

lehetséges. A 0 látóként triviális, gondoljunk például az $x = 0,5$ függvény grafikonjára – képen kék grafikon. Ugyanez a függvény koordináta táblán nem ábrázolható, mert nem tudunk olyan pontokat ábrázolni, melynek van nem egész koordinátája. Ha a diák nem ésszel használja az eszközt, nem találja meg a megoldást. A végtelen is könnyen látható,

$x = y$ függvény grafikonját hívjuk segítségül (piros egyenes).

Mivel a vak diákok kezében lévő eszköz korlátos, azt látni, hogy az egyenes végtelen rácsponton fog átmenni, gondolkodás nélkül lehetetlen. Azt, hogy egy metszéspont hogyan alakulhat, látóként is nehezebb megtalálni, bizonyos tulajdonságú egyenesekre igaz, hogy egyetlen rácsponton megy át, egy lehetséges megoldást a képen zölddel jelöltem.

Ha a diák meg is találja a három különböző megoldást, még nincs készen a feladattal. Mi hiányzik? Bizonyítani kell, hogy nincs több megoldás – tehát, ha kettő metszéspont van, akkor végtelensok van. Az egy metszéspont és a bizonyítás helyes menetét itt nem közlöm, mivel senki nem járt még részleges sikerrel sem a feladat ezen részével, nem lenne érdemes elvenni az olvasótól a feladat megoldásának örömét.

A minta

Kilenc, középiskolát integráltan végzett látássérült személlyel vettem fel az interjút. Mindannyian 19 és 27 év közöttiek, maximum 7 éve érettségiztek. Közülük 6 férfi, 3 nő. Lakhely szerint Tolna megye, Bács-Kiskun megye, Vas megye jelent meg, illetve hat fiatal Pest megyei, közülük 4 budapesti. Középiskolát öten végeztek Budapesten, 2011-ben, 2013-ban, 2014-ben, 2016-ban és 2017-ben érettségiztek, közülük hárman (2013, 2014 és 2016) egyazon iskolában. További érettségik közül egy-egy született Vas megyében 2011-ben, Hajdú-Bihar megyében 2012-ben, Bács-Kiskun megyében 2015-ben, Tolna megyében 2016-ban. Foglalkozás szerint a megkérdezettek közül 8 fiatal jelenleg egyetemen tanul, közülük egy tanulmányai mellett dolgozik is, papíron ügyviteli asszisztensként, gyakorlatban érzékenyítő foglalkozásokat vezet. Harmadik interjúalany OKJ végzettség (szoftverfejlesztő) megszerzése óta telefonos operátor munkakört lát el. Legmagasabb iskolai végzettsége a 3. interjúalanynak OKJ, nyolc további alanynak folyamatban lévő egyetemi tanulmányai.

Látásuk szerint – közeli látásélességüket nem tudták megmondani - négyen gyengénlátók (ROP V0,1 mindkét szem; „születéskori idegi sérülés” társuló színvaktsággal és fényérzékenységgel V0,1 mindkét szem; másodlagos glaucoma jobb szem fényérzéssel, bal szem V 0,3; myopia és nystagmus – vízus értéket nem tud, de 19-20 dioptriás szemüveget visel.), öten súlyos fokban látássérültek (ROP V bal szemre fényérzéssel, jobb szem fényérzés nincs; ROP V bal szemre nagytárgylátással – pontosabbat nem tud, jobb szem fényérzés nincs, rethinitis pigmentosa bal szem fényérzéssel, jobb szem fényérzés nincs; rethinitis pigmentosa fényérzés nélkül, glaucoma és jóindulatú daganat következtében eltávolított szemgolyók). Kialakulásának ideje szerint 8 alanynál születéskor, 6. interjúalanyt születésekor cataractával műtötték, majd hat évesen kancsalsággal, a glaucomára akkor derült fény.

Lássuk mindezt összesítve is:

Interjúalany sorszáma, neme	Lakhelye (megye)	Kora	Foglalkozása	Érettségi éve, helye (megye)	Szembetegsége, vízusa
1., Férfi	Vas	27	tanuló	Vas, 2011	idegi sérülés, színvakság, fényérzékenység. V:J: 0,1 B: 0,1
2., Nő	Pest	25	tanuló, érzékenyítő	Hajdú-Bihar, 2012	rethinitis pigmentosa, V:J: fén, B:fé
3., Férfi	Budapest	25	telefonos operátor	Budapest, 2013	ROP, V:B: J:fén, nagytárgylátó
4., Nő	Budapest	25	tanuló	Budapest, 2011	ROP, nystagmus, farkasvakság. V: J:0,1 B:0,1
5., Férfi	Budapest	24	tanuló	Budapest, 2014	glaucoma, daganat. V: - műszeme van
6., Férfi	Bács-Kiskun	21	tanuló	Bács-Kiskun, 2015	másodlagos glaucoma, V: J: fé, B: 0,3
7., Férfi	Tolna	21	tanuló	Tolna, 2016	myopia, nystagmus D: 19 és 20
8., Nő	Budapest	19	tanuló	Budapest, 2017	rethinitis pigmentosa V: J: fén, B: fén
9., Férfi	Pest	22	tanuló	Budapest, 2016	ROP V, V: J: fén, B: fé

1. táblázat: Az interjúalanyok demográfiai és szemészeti adatai

Az interjú tapasztalatai

A megkérdezettek első kedvenc tárgya így alakult: informatika, magyar, magyar, irodalom, német, testnevelés, egészségügyi alapismeretek, földrajz, semmi. 4. interjúalany harmadik helyen megjegyezte a matematikát is.

Az interjúalanyok minimum hármas, többségében négyes jegyeket kaptak gimnáziumban, érettségijük is hasonlóan sikerült.

Az őket tanító pedagógussal, matematikával kapcsolatos érzéseikre, hozzáállásra, tapasztalataikra és témakörök nehézségére így válaszoltak a megkérdezettek:

„Tizediktől viszont már egy új tanár tanított minket, ő alapjánól nagyon jófej volt velem, még azt is mondta nekem, hogy ha rajta múlna, ő legszívesebben matekóráról hazaküldene vagy beültetne engem a könyvtárba, hogy ott tanuljak” – mondja 6. interjúalany, akinek jobb szemén fényérzése, balon 30%-os látása van, felső

tagozaton négyes, hármas, kilencedikben hármas tanuló volt. Mit jelentett számára a matematika kérdésre *„Hát, a matematika, hát, az sajnos számomra semmit nem jelentett, mert nagyon nehezen tudtam vele boldogulni. Tizedikben jutottunk el odáig, hogy az értékelés alól felmentést kapjak, mert nem volt ahhoz meg a térlátásom, hogy a geometriai ismeretek azok menjenek, ezért is nem érettségiztem matematikából...”* választ adja. Az algebrai feladatban a lépéseket meg tudja fogalmazni, ám a zárójelfelbontással nem boldogul, bár korábban, a milyen érzései voltak a matematikával kapcsolatban? kérdésre így felel: *„az algebrai része, az azt mondom, könnyű volt”*.

9. interjúalany: A pedagógus *„teljes mértékben segítőkész volt, az első 4 évben főleg, mondjuk az utolsó évben sem volt erre panaszom, viszont a segítőkészségét ellensúlyozta az, hogy az utolsó évben zsarolt az érettségivel. Magyarul az volt az elmélete, hogy nekem nem fog ötöst adni, még ha úgy is sikerül, mert ez irreális lenne a többi osztálytársammal szemben. Megjegyzem, az egyik srác szinte minden évben bukásra állt nála, sőt az órát is mindig feltartotta, de valahogy az év végén mindig átcsusszant kettessel. Nekem viszont mindig küzdenem kellett a jobb jegyért.”* Ő többnyire hármas jegyet kapott, érettségije négyesre sikerült, de egyik feladattal sem boldogult, bár az algebraba belekezdett, zárójelet felbontani nem tudta. Heti két, osztályfőnöke által tartott korrepetálás hatására a különböző területek értésére ezt válaszolja: *„Hát, szinte majdnem mind kínai volt nekem. Mindig igyekeztem megoldani, de az esetek nagyrésztében elakadtam valahol.”*

3. interjúalany így nyilatkozik: *„Négyes, ötös voltam belőle. Szerettem”, „Nagyon is,”* segítőkész volt, *„de minden héten legalább három matek korrepetálásunk volt”,* viszont a volt diák szóbeli érettségije mégis csak hármas lett, az egyenlethez hozzákezdni sem tudott.

A matematika órával kapcsolatban jó érzéseket ketten (4. és 3. alany), vegyes érzéseket négyen (2., 7., 8., 9. alany) és kizárólag rossz érzéseket hárman fogalmaztak meg (1., 5. és 6. alany).

Arra a kérdésre, meg tudna-e oldani egy problémát, kivétel nélkül igenlő választ adtak.

Gyakorlati kérdések tapasztalatai

Az interjúban résztvevők közül négy egyáltalán nem tudott hozzákezdeni sem az algebra feladathoz, hárman a zárójel felbontásban hibáztak, hibátlanul az ismeretlent megadnia két embernek sikerült (4. és 7. alany), közülük negyedik interjúalany ellenőrzést is végzett magától. Következő meglepetést a függvényes feladat hozta. Várakozásom szerint a fiatalok többsége megtalálta volna a végtelen megoldást, páran a nullát. A valóság ennél elkeserítőbb volt. Tulajdonképpen elindulni sem nagyon tudtak a feladattal megkérdezettek, hiába volt a fa eszköz a kezükben, a próbálgatás eszköze hiányzott mindenkinél, még szóbeli segítség („Lehet-e 0, lehet-e 1, lehet-e 2, vagy több is?”) után sem jutott eszükbe kipróbálni. Sem látva, sem tapintva. A végtelen megoldás 2 embernél (3. és 8. alany) jelent meg, de példát nem mutattak, az indoklás *„Az egyenes végtelen hosszú”* volt mindkét esetben, ami ugyan igaz, de nem jó bizonyítás. Minden súlyos fokban látássérült személynél gondot okozott a rácsponthoz fogalma. Számukra a feladat megértése is nehézkes volt, de boldogulni ezután sem tudtak vele. A koordináta rendszer végtelenségének kérdése is felmerült, 5. interjúalany számára nem volt világos. 7. interjúalany megtalálta a nulla lehetőséget, de mikor kértem rá példát, olyan egyenest húzott meg, ami végtelen rácspontra ment át. Többi öt személy a feladathelyzetből kilépett, *„Hát, én ezt meg nem mondom”, „Nem tudom”* válaszokkal kísérvé. A problémát a már sokat emlegetett gondolkodás hiányában látom. A kapásból rávágott *„Nem tudom.”* az algebrai kérdésre 4 alkalommal fordult elő, ők bele sem kezdtek ebbe a feladatba sem, amit nyilvánvalóan rengeteget gyakoroltak. 2. interjúalany a feladatok után hozzáteszi: *„Nekem semmilyen ilyen vakos eszközöm nem volt”*.

Diszkusszió

1. Első hipotézisem, miszerint a megkérdezettek kifejezetten rosszul érezték volna magukat a matematikaórákon, az interjú cáfolta. Többségük jó vagy semleges érzéseket táplált a matematikaórák iránt, saját tudásukhoz viszont kivétel nélkül igen túl optimistán álltak, saját tudásukról nem volt pontos képük.
2. Második feltételezésem, mely a megkérdezettek feladatmegoldásának sikerességét firtatta, igazolódott, a feladatok megoldása valóban sok esetben kudarcba fulladt.
3. Harmadik feltételezésemmel ellentétben már az algebrai feladatom is gondokat okozott, s mint írtam, helyes vagy legalább részben helyes megoldást koordinátarendszeres feladatomra egyáltalán nem kaptam. A beérkezett

helyes megoldások alapján a fiatalok önálló gondolkodás mentén nem, algoritmusok útján kis részben voltak képesek önálló feladatmegoldásra.

4. Az interjú alapján igazolni látszik harmadik hipotézisem, miszerint bizonyos tanárok sokat tesznek a feladat alól való kibújás érdekében. Az algebrai feladatot egy nyolcadik osztályos diáknak kényelmesen meg kell tudni oldani. Ebben komoly problémát látok, hiszen, mint azt dolgozatomban igyekszik alátámasztani, csupán a látássérülés megléte nem ad okot arra, hogy az ember hátat fordítson a matematikának, és fordítva. Másik véglet, mikor a pedagógus szeretne segíteni, de nem tudja, hogyan tegye. A problémát ilyenkor az oktatás technikai kivitelezésében látom. Azzal, hogy egy maximálisan elvont tárgyat lényegében csak szóban, géppel tanítunk, gyakorlatilag utat ásunk annak, hogy a diák számára jelentés nélküli szavakat ismétljen vissza. Ennek nincs sok értelme, erre egy számológép is képes. Ugyan lényegesen egyszerűbb lediktálni minden feladatot, aztán annak megoldását, mint kézbe adni, nem lenne szabad a középiskolából sem kispórolni az eszközhasználatot.
5. A diákok jegyei és tudása, illetve tudásukba vetett hite közt határozott diszkrepancia figyelhető meg. Abból, ha a pedagógus nem kezeli helyén a látássérülés tényét a diák tanulmányi útjában, és a diáknak a valóságot nem tükröző visszajelzést ad akár osztályzat, akár verbális megerősítés, akár csak egy-egy megjegyzés szintjén, következik, hogy a diák a tudását félreértékeli. Az önértékelés és a metakognitív tudás nem megfelelő működéséről mind tudjuk, miért káros.
6. Komoly problémát látok a verbalizmus jelenlétében és ismeretlenségében: középiskolai oktatást nagyban nehezíti a verbalizmus, vagyis mikor a diák olyan szavakat használ, amiknek nincs jelentéstartalma számára. Mivel a középiskolai matematika jelentős része elvont, nagyon nehéz visszakövetni, hol lehet a probléma, pláne, ha a diák önmaga nem tud segíteni. Mivel ő nem tudja magáról, hogy olyan fogalmakat használ, amiknek nincs igazi tartalma, nem fogja jelezni, hogy nem érti. Technikailag nem látja, hogy nem érti, így jelezni sem tudja, viszont a pedagógus – mivel nem tud jóformán semmit a látássérült személyek pszichológiájáról és/vagy gyógypedagógiájáról, nem tudja, hogy a diákja nem érti, vagy hogy a diák határait mennyiben határozza meg látásélessége.

7. Ha a gyerekeknek a kezébe kizárólag algoritmusokat adunk, akkor amint találkoznak egy gondolkodást igénylő feladattal (és lássuk be, felnőtt életük logikai készségeket sokkal inkább vár el tőlük, mint egyenletrendezést), gyakorlatilag blokkolnak, nem tudnak mit kezdeni vele. Kissé olyan ez, mintha ahelyett, hogy egy iskoláról elmondanánk, hogy a teremszámok mit mutatnak, egy új diáknak minden egyes teremhez külön útvonalat tanítanánk. Ha egy új teremszámot lát, hogyan fogja megtalálni, ha azt sem tudja, hányadik emeleten keresse?
8. A zárójelfelbontás kilencből három személynek, tehát a megkérdezettek harmadának okozott gondot. Ez a probléma a tudás elsajátításának ezen végéről könnyű, de emlékszünk, hány színes vonallal, karikázással emlékeztetett minket a tanárunk, hogy ne felejtsük egy a zárójelben lévő MINDEN taggal végrehajtani a zárójel előtti műveletet? Ugyanezt, vagyis a matematika érzékelhetővé tételét a látássérült, és különösen a súlyos fokban látássérült tanulók életéből kispórolják. Nem igazán jó út ez, bár igen kényelmes. Erre vonatkozó ötleteim, gondolataim lásd később.

Problémák és megoldások

Hogyan befolyásolja a verbalizmus a tanulást?

Érezhetően, ha tudok olyan szavakat használni, amiket nem ismerek és meg tudom jegyezni a sorrendjüket, az humán műveltségi tárgyaknál nagy segítséget jelent. Ellenben a matematikai problémamegoldást jelentősen gátolja. Hiába tudom a szavakat megfelelő sorrendben leírni egy tétel bizonyításában, vagy egy bonyolultabb egyenletnél hiába tudom a megoldás menetét lépésről lépésre, ha használni nem tudom, hiszen nem értem, mit kéne vele tennem.

Véleményem szerint, mivel a látássérült tanulók sokkal több időt töltenek el a problémák manuális kivitelezésével, esetükben kiemelten fontos lenne a problémamegoldó irányzatot folytatni, hiszen azok a diákok, akik a feladatban magát a problémát látják meg és ami még fontosabb: értik meg, lényegesen hamarabb találnak rá megoldást, mint azok, akik az általuk ismert algoritmusok közt keresgélnek tulajdonképpen vakon tapogatódzva a megfelelőt.

Függvények világában

Mások módszerei

A **Texas School for the Blind and Visually Impaired** (Texasi Vakok és Gyengénlátók Iskolája) honlapján megtalálható információk szerint az iskola középiskolai matematikatanára, a 30 év tanítási rutinnal rendelkező Susan Osterhaus több lehetséges megoldást is lát arra, hogyan lehet a függvényábrázolást látássérült diákokhoz közelebb hozni.

Elsőként a The Graphic Aid for Mathematics eszközt mutatja be. Ez tulajdonképpen olyan, mint az itthon használt koordinátatábla, ám négyzethálós, ezzel sokkal jobban érzékeltetve a koordinátarendszer folytonosságát, másrészt gumi alapú. Ilyen eszközt sajnos itthon nem láttam még.

Írásában kitér (és egyébként több, a honlapon fellelhető cikkében említ) a gépi megoldásokra is. Osterhaus szerint fontos a diákokat megtanítani manuális és gépes megoldásokra is, illetve arra, hogyan és mi alapján válasszanak. Név szerint az Accessible Graphing Calculatort és az ORION TI-34 beszélő számológépet említi. (Osterhaus, S. A., 2003)

Előbbi egy, a GeoGebrához sokban hasonlító program, beszélő funkcióval és taktilis kijelző csatlakoztatási lehetőséggel, mely bár nem olcsó (195\$ - kb. 50.000 Ft., 2018. februári adatok szerint), az iskola honlapja szerint nagyon jól használható.

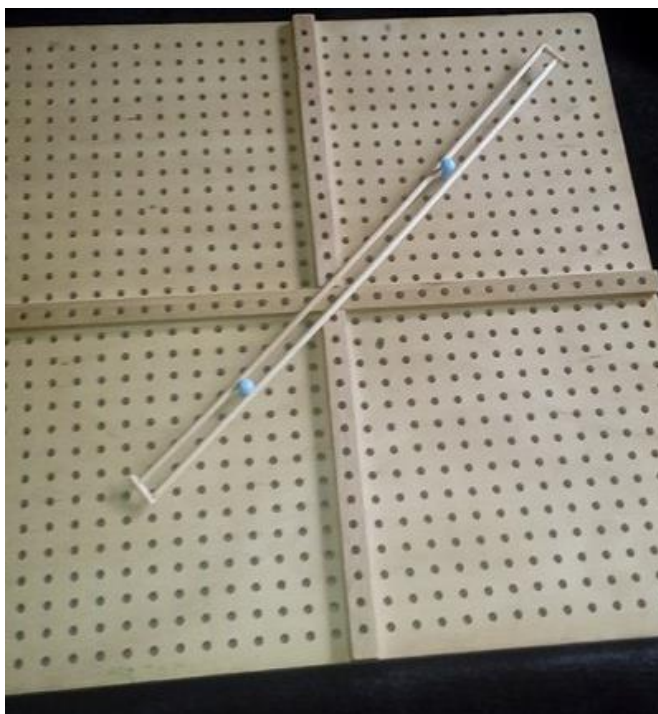
Mivel igen hasonlít az egyébként ingyenes GeoGebrára, az is megoldás lenne a magyar diákok számára, ha ez jól kommunikálna képernyőolvasó programokkal.

Lineáris függvények

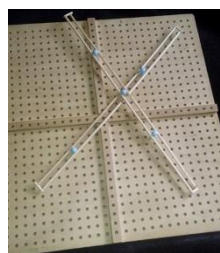
Amikor az ember lineáris függvényeket tanít, a koordináta táblának nagy hasznát veszi. (Brumbauer, Harmath, 2014) Azok a függvények ábrázolhatók a táblán, amiknek van legalább két olyan pontja, melynek mindkét koordinátája egész - bár lényegesen lassabban, mint egy látó diák füzetében. Mit csinál a látó diák? Bejelöli két pontját a függvény grafikonjának, majd e kettőt összeköti vonalzóval, így a többi pontot számolni nem kell, csupán leolvasni. Mit csinál a vak diák? Mivel a gumigyűrűk elmozdulnak tapintás hatására, jobb híján kiteszi a függvény annyi pontját, ahányat

csak tud és végtére is arra nem tudja használni a táblát, amire a diák a füzetét használja. A további pontok gyors leolvasásáról lemarad.

Tapasztalataim szerint a fenti problémára megoldást jelenthet egy fapálca, melyen középen éppen a koordináta tábla lyukainak átmérőjével egyező vájat volna kialakítva. Így a vak diák is kiszámol két pontot, a két ponton rögzíti a pálcát (lásd kép) a további, feladat által kért pontokba pedig gombát tud szúrni, ha a pálcától nehezebbre esik leolvasni a koordinátákat. Az eszköz megoldást nyújthat lineáris vagy abszolútérték-függvények metszéspontjaival kapcsolatos feladatok megoldására, ellenőrzésére, egyenletek megoldására, ellenőrzésére, illetve a feladatmegoldás támogatására, bevonva a kizárólag halláson alapuló megoldásmenetbe a tapintást is.

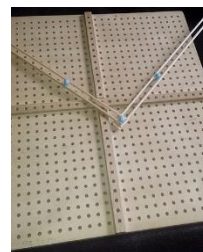


3. ábra - Egyenes meghatározása a koordinátatáblán sínnel



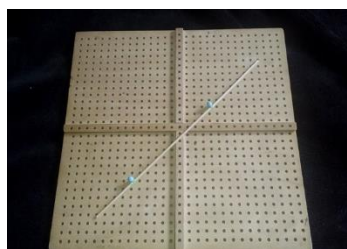
5. ábra - Egyenesek metszéspontjának meghatározása sínnel

re egymástól két távolságtartó hurkapálcadarabbal összeragaszt. Az abszolútérték függvény miatt érdemes legalább egyik véget zárni, hogy a csúcsnál könnyebben összeilleszthető legyen. Ez segítségünkre lehet egyenesek metszéspontjának keresésében, illetve függvény szerinti elhelyezkedés, egyenlőtlenségekkel kapcsolatos feladatok megoldásában.



4. ábra - Abszolútérték függvény grafikonja sínek segítségével

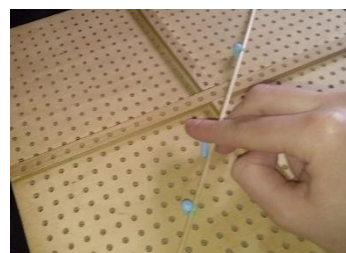
Egy fokkal ügyesebb diákok számára nem kell sín, elég vezetővonal, melyet egy



6. ábra – vezetővonal

hurkapálca, két, lehető legkisebb gumigyűrű (a képen hajgumi) és két gomba összegumizásával lehet legkönnyebben elkészíteni. Így a gombák elhúzhatók, a diák beállítja a megadott pontokat, majd továbbiakat úgy keres, hogy domináns kezébe fogja a gombát, középső vagy gyűrűs ujját a hurkapálca hozzá közelebb álló oldalához

igazítja, ezt távtartóként használva, mutató és hüvelyk ujjá közé fogja a gombát és húzza a kezét a hurkapálca mellett. Pontosabb finommotorikát, ügyesebb kezet igényel, mint a sín, viszont miután a diák megszokta, könnyebb vele boldogulni, könnyebb előállítani és könnyebb leolvasni mellette. Hátránya a sínes verzióval szemben, hogy nehezebb megszokni, melyik pont lesz valóban az egyenesen, nehezebb megtalálni a megfelelő lyukakat.

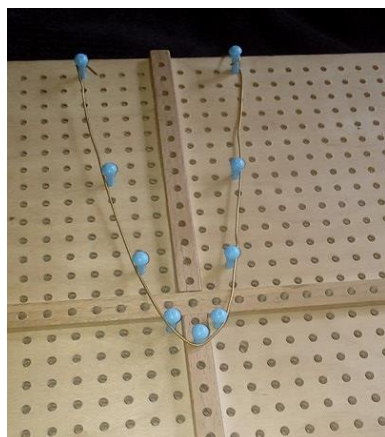


7. ábra - Egyenes pontjának meghatározása vezetővonal segítségével

Mivel mindkét eszköz saját fejlesztésem, használatát sehol nem oktatják, ez minden esetben az azt használni igyekvő tanár feladata volna. Mivel a többségi pedagógusoknak nem tanítanak semmiféle sérült gyermekekkel kapcsolatos módszertant, érthetően érzik magukat mély vízbe dobva, váratlan plusz teherrel sújtva. Az eszköz azért lényegesen jobb, mint a gumi, mert ugyan vizuálisan az ember számára két pont közt a legrövidebb út az őket összekötő egyenes szakasz, a csukló és a kéz mozgása nem egyenes mentén történik. A kifeszített gumigyűrű pedig az ember kezének engedelmeskedik, nem pedig az euklideszi geometria axiómáinak. Tehát tekintsük úgy, az eszköz használata fontos. Oktatása megoldható tanórai keretek közt: akár egy tehetséges, vagy az osztálynál jobban teljesítő diák segítségével, amely megoldás az integráltan tanuló diák szociális kapcsolatain is lendíthet, akár a tanár manuális segítségével, miközben frontális órát tart.

Nem lineáris függvények – a parabola

Az egyik első nem lineáris függvény, amivel a diák találkozik, az $f(x) = x^2$ függvény. Jellegzetessége, hogy minden pontban deriválható, tehát $x = y = 0$ pontban is görbül, nem lehet csúcsa. Ennek érzékeltetésére a gumigyűrű nem jó, hiszen egyrészt két pont közt kifeszítve egyenes szakaszt ad ív helyett, másrészt, mert elmozog, miközben a vak diák letapogatná. Egy sokkal jobb megoldásnak érzem a nem lineáris



8. ábra – $x^2 - 2$ függvény

függvények érzékeltetésére a külső lapon, domború festékekkel készülő ábrák helyett a diákok által megszokott koordináta-táblán maradván mutatni meg az új jelenséget. Ehhez segítségül ugyanúgy segédvonalat hívok, mint a lineáris függvénynél, de ezúttal drótból vagy gyurmából. A normál gyurma túl puha, az intelligens gyurma stabilabb, és neon színekben is kapható, így egy aliglató diák számára is láthatóvá tudná tenni a koordináta rendszert némi fekete festékek karöltve. Sajnos mivel nem olcsó, nem elvárható, hogy minden integráló iskola

vegyen. A drótos megoldás merevebb, vak diákok számára jobb megoldás, mivel ugyanúgy feltehető-levehető a tábláról elmozdulás nélkül, mint a fapálca, így a diákok vagy a tanár az $f(x) = ax^2 + b$ alakokat is ki tudják alakítani épp, mint látó társaik számára

a

fűzetben.

Mivel a tárgy használatához a diákot nem feltétlen egyszerű hozzászoktatni, érdemes egy – egy, matematikával jól boldoguló diákot megkérni, akár korrepetitor jópontért (amennyiben ez más, például rossz dolgozat után legalább két jegyet javító diák felkészítését segítő diákkal is bevezetésre kerül), akár baráti – szociális alapon, hogy ellenőrizze, a látássérült diák kirakása megfelelő-e. A tárgy és az új anyag belépésénél lehet a koordináta táblán mutatni a diákoknak az első feladatok megoldását, táblai megoldás helyett, így a látássérült diák ugyanazt érzékeli a táblai munkából, mint látó társai. Tehát az első feladatokat a vak diák tábláján kirakva neki mutatni, míg a többiek számára a táblát felemelve mutatni.

Hogyan használjuk ki a parabola kirakásának lehetőségét?

A függvény bevezetésén kívül jól jön a függvények képének pontos ismerete egy-egy algebrai feladatban, akár ellenőrzés céljára is. Nézzük például a következő feladatot:

$$x^2 - 4 = 0 \quad (\text{ld. Gerőcs, Orosz, Paróczai \& Szászné, 2009, p.165.})$$

Nyilvánvalóan ezt az egyenletet senki nem fogja a másodfokú egyenlet megoldóképletével számolni. A legtöbben rávágánk, hogy $x = 2$. Hiányosan. Miért?

Nézzük most a grafikus megoldását a példának! Kirakjuk az $f(x) = x^2$ függvénynek 5 egész koordinátájú pontját, hozzáhajlítjuk a drót vezetőt, majd az egészet az y tengely mentén 4 egységgel lefelé toljuk. Az egyenlet másik oldala a 0, így könnyű dolgunk van, elég megnézni, hol metszi az x tengelyt a függvény képe. Mit látunk elsőre, akár tapintással, akár látva érzékeljük? Azt látjuk, hogy az egyenletnek két megoldása van, ezeket azonnal le is olvassuk. Míg algebrai úton hajlamosak vagyunk megfeledkezni a -2 -ről, és csak a $+2$ -t érteni az $x^2 = 4$ egyenlet megoldásának, a grafikus út erre nem adott lehetőséget. Fontosnak tartom ennek a tudatosítását, hiszen értékes pontokat veszít az ember például az érettségin, ha egy másodfokú egyenletnél csak az egyik megoldást veszi figyelembe.

Bonyolultabb feladatoknál is sokat segíthet az eljárás. Vegyük a $-2x^2 + 3x - 2 = 0$ egyenletet (ld. Gerőcs, Orosz, Paróczai & Szászné, 2009, p.167.)! Az egyenlet természetesen megoldható algebrai úton is – a tankönyv egyébként mindkét megoldást kéri – de most mi a grafikus úttal foglalkozunk, ebből is csak a tankönyv által ajánlott egyikkel. Rendezzük át az egyenletet úgy, hogy a másodfokú és az elsőfokú tag külön oldalon legyen: $2x^2 = 3x - 2$. Most ábrázoljuk az egyenlet két oldalát, mint függvényt, ugyanabban a koordináta-rendszerben, és keressük a metszéspontokat. Mint látjuk, a kettőnek nincs metszéspontja, az egyenletnek nincs megoldása. Erre a következtetésre algebrai úton a megoldóképletet használva a diszkrimináns < 0 lépésben jutunk, ha nem számoltuk el az előjeleket. Hozzá kell tenni, hogy a megoldásmenet nem minden esetben segít minket a koordináta táblán. Sokszor csak közelítő értéket tudunk mondani – például a

$2x^2 + 3x - 5 = 0$ feladatban, ahol az egyik megoldás $-2,5$. Tört koordináták leolvasására csak abból a célból javaslom, hogy a diák önellenőrzést tartson: ha nem

ugyanazon két egész szám közé esik a megoldása algebrai és grafikus úton, akkor érdemes újra átgondolni, mit számolt el.

Ez a gondolatmenet - az ellenőrzöm más módon a megoldásom, ellentmondást észlelek az ellenőrzés és a megoldás közt, megkeresem a hibám és javítom - elengedhetetlenül fontos. Látóként egy leírt algebrai számolást összehasonlítani egy skiccelt ábrával pár pillanatig tart, és súlyos pontokat nyerhet. Míg az ember számolást használó ellenőrzésmóddal hajlamos újból elrontani, vagy átsiklani a hiba felett, ha érzékeli, hogy a megoldásnak pozitívnak kéne lennie, helyett -200 -at számolt, az igen gyanús.

Algebra világa

Nevezetes azonosságok

Az algebra témakörhöz sorolható probléma a nevezetes azonosságok köre. Kilencedik osztálytól érettségiig tisztában kell lenni a három azonossággal, illetve fel kell tudni ismerni más feladatokban az azonosságot. Ezek megtanulása sok diáknak okoz problémát, az általam tanított diákoknak sem volt könnyű dolga.

A nevezetes azonosságokat zárójelfelbontásként is tanítják, pl.ev:

$$(a + b)^2 = (a + b) * (a + b)$$

A zárójelet pedig fel kell tudni bontani. Ez látóként nem egy bonyolult lépés, pár színes jelzés után rögzül, melyik tagot mivel kell szorozni még akkor is, ha a diák egyébként nem érti, mit miért tesz. Munkám során azt tapasztaltam, a súlyos fokban látássérült diákoknak nagy nehézségeket okoz a zárójellel való bánás mind felbontás, mind kiemelés irányban. A következő fejezet erre próbál majd megoldást nyújtani. Hallás után lényegesen nehezebb dolgunk van, ezért itt érdemes behozni a tapintást és a lejegyzést legalább eleinte úgy kérni, hogy az tükrözze a tapintott élményt – tehát nem csak a végösszeget, hanem a számolás módját és lépéseit is. Erre most megpróbálok két, saját tapasztalataimon alapuló módszert mutatni, melyek segíthetnek látássérült diákok zárójelfelbontásra való oktatásában.

Az ideális, tehát alapvetően gondolkodáson alapuló megoldás persze az lenne, ha a diák értené a szorzást, mint ismételt összeadást, mert ezesetben a $3 * (a + 4)$ világosan jelentené számára a három fiókot, ahol mindegyikben ugyanaz van. Ez azonban csak akkor működik, ha az alsó tagozatban a szorzásnak értelmet is adtak, nem csak megtanították a szorzótáblát. Ha a gyerek érti, mit csinál, sokkal könnyebb dolgunk van, nem fog hibázni. Mivel erre sajnos sokszor mégsem lehet támaszkodni, a következőkben algoritmusokat fogok mutatni a zárójelfelbontás tanítására.

Jó kiindulás a tanítás során támaszkodni arra, hogy a diák, amennyiben tanult abakusszal számolni és különösképpen szorozni, az egyet innen-egyét onnan elven már végzett szorzásokat. Kétjegyű számot kétjegyű számmal való szorzását abakusszal (Az alkalmazott eszköz valójában szorobán, ám abakusz néven tanítják, a diákok is így ismerik, ezért a továbbiakban abakuszként hivatkozom rá) így tanítják:

$TE * te = Te + Ee + Tt + Et$, ahol TE a szorzó tízesei és egyesei, te pedig a szorzandó tízesei és egyesei alaki értékének megfelelő jelek (lásd pl. Csocsán, 2014). Ez a szemlélet konkrétan az, ami nekünk a zárójelfelbontásban kell. Erre többféleképpen tartom elképzelhetőnek az építkezést, az, hogy melyik válik be egy-egy diáknál vagy egyáltalán szükség van-e tapintott megsegítésre, az diákonként eltérő lehet.

Abakusz analógia

Főleg azok számára lehet hatékony, akiknek az „ujjában még benne van” az abakusz használata, tehát például azok a diákok, akik szegregált körülmények között végezték a felső tagozatot. Mivel jó eséllyel nem tudatosult, hogy pontosan mit csinál szorzáskor, érdemes elmagyarázni, majd az első feladatokat a következőképp adni. Vegyünk példának először egy egyszerű zárójelfelbontást: $3 * (a + 4)$! Abban az esetben, ha $(a + 4)$ egy kétjegyű szám lenne, az abakuszon így nézne ki a feladat kirakva: a bal szélső rúdon látnánk a hármat, a jobb szélső két rúd szabad lenne, utána következne a kétjegyű szám. Most ehelyett készítsünk Braille-ben egy a betűt, ezt ragasszuk gyurmaragasztóval oda, ahova a kétjegyű szám egyesek helyiértékén lévő számjegye kerülne (tehát jobbról a harmadik rúdra) és tegyük ki a hármat a bal oldalra, illetve a 4-et a negyedik rúdra (ahová a kétjegyű szám tízes helyiértéken álló számjegye kerülne)! És most kérjük meg a diákot, hogy hangosan számolva kezdje el a szorzást úgy, hogy a részeredményeket a számítógépen jegyzi! A szorzás abakuszon általában tanított szabályai szerint haladva a diák el fogja kezdeni a $3 * 4$ szorzással. Leírja (lehúzza) a 12-t, feltolja a négyet, ezzel már nincs dolga. A következő részsorzás a $3 * a$, látja a 3-at és az a -t, és leírni le tudja. Így meg is van a zárójel felbontása, hiszen leírja a $3a$ -t, feltolja az a -t és a 3-at és látja, hogy készen van. A fokozatosság jegyében fontosnak érzem olyan zárójeles összeggel kezdeni, melyben az első tag az ismeretlen, hiszen a diák az abakuszon tanult módszer szerint így először számot számmal szoroz, ami ismert terep, jobb esélyei vannak ezt a lépést önállóan meglépni, mint fordítva. Természetesen, ha ilyen sorrendben megy, lehet az ismeretlen helyét változtatni, több ismeretlent behozni, több tényező tagokra átállni (pl. $4b * (2a + 5c)$). Mikor már stabilan megy, érdemes átállni két zárójeles összeg összeszorzására.

Azt tanácsolom, itt is érdemes a zárójelenként egy ismeretlennel indulni. Érdemes különbözőt választani, mert az közelebb áll a kétjegyű számok szorzásához, az

írásban kevésbé bonyolódhat bele a diák. Tehát az indulás ugyanaz, mint az előbbieken: megkeressük az abakuszon használatos rudakat, és feliratozzuk őket. Nézzünk ehhez egy feladatot: $(3 + a) * (b + 5)$. Kétjegyű szorzó esetén három rúd maradna üresen az abakusz jobb szélén, tőle balra lesz tehát az 5, eggyel balra pedig a Braille feliratos b . Az abakusz bal szélére lehúzzuk a 3-at, mellette pedig előállítjuk az a -t. Fontos, hogy a részeredményeket írja a diák, mert számunkra most, az abakusszal való korábbi tevékenységeitől eltérően ezek lesznek fontosak. A diák itt a két szám összeszorzásával kezd, majd folytatja az $a * 5$ -tel. Ezután az 5-öt feltolja, azt már nem fogja többet használni. $3 * b$, majd $a * b$ és feltolja b -t is. Már itt érdemes megtanítani ügyesen rendezni a tagokat, hogy ez később ne legyen probléma. Gondolok itt arra, hogy tegyen ki egy egyenlőségjelet, és írja át a szorzatokat úgy, hogy az együttható az ismeretlen előtt legyen. Tulajdonképpen a feltolás lépés miatt ajánlom ezt a módszert, ez a nagy előnye bármilyen új módszerrel szemben. A diák korábbi tanulmányai alapján eltünteti a számolási teréből azokat az adatokat, amikre már szüksége nincs, és egy már begyakorolt szisztémát követve nem hagy ki semmit.

Manuálisan – gyufásdoboz módszer

Ez a módszer sokkal jobban hasonlít a látók módszerére. Az előző verziót ügyesebbnek gondolom, de mivel 4+1 alakú abakuszt nem minden vak diák használ stabilan és még ha használja is, az integráló iskola sokszor nem tudja biztosítani ezt az eszközt – íme egy alternatív változat.

Ehhez szükségünk lesz Braille feliratokra szócsíkok formájában, ajánlott egy kártyasorozatot készíteni, amelyből kirakhatók lesznek a feladatok. A pontos kártyasorozatot a Braille matematika szabályainak megfelelően készítjük el: számsorból érdemes többet készíteni, 3-4 sorozatot, nullától addig, ameddig a pedagógus jónak látja. Érdemes a számsort a diákkal elkészíttetni, ő nagy valószínűséggel gyorsabban, könnyebben és jobban tájékozódik a Braille gépen, mint mi. A kártyákat gyurmaragasztó segítségével gyufásdobozokra fogjuk erősíteni úgy, hogy az együtthatós ismeretlenek egy gyufásdobozra kerüljenek. Az ellenőrzést megkönnyítendő érdemes a kártyákra ráírni síkírással is a karaktereket. Ha megvannak a megfelelő gyufásdobozok, szükség lesz még 2-3 db. 10 cm széles kartonlapra: ezek fogják jelölni a zárójelet. A karton lehet kisebb is: férjen el rajta

legalább két gyufásdoboz egy sorban, de ne legyen olyan nagy, hogy a diák ne érje át egy kezével. Ez a kifejejtés miatt fontos, ha mozgatni kell a kezét, nagyobb eséllyel fog kihagyni egy-egy tagot, tényezőt. Tegyük az egész alá egy nagyobb méretű tálcát, melynek alsó széléhez igazítjuk majd a gyufásdobozokat. Ez egyrészt megelőzi, hogy a számolási térből kikerüljenek adatok, akadályozza a lesodrást, figyelmen kívül hagyást, harmadrészt a gyufásdobozok fel-le tolásával emlékeztethetjük magunkat a legutóbb használt elemekre.

Vegyünk egy példafeladatot: $3 * (2b + 4)!$

Érdemes először megtanítani a feladat kirakását. Ehhez a feladathoz szüksége lesz a diáknak egy gyufásdobozra 3-as felirattal, egyre $2 * b$ felirattal és egyre 4 felirattal, utóbbi kettőt egy kartonra helyezve, illetve a gépére. Miután kirakta a feladatot, mindkét kezét a tálcára teszi. Bal kézzel megkeresi a szorzót, jobb kezét ráteszi a zárójelre, ellenőrzi, azon belül hány tag van. Amit tudatosítani kell, hogy bal kezét jobb kézzel szorzunk, mindent mindennel. Tehát a bal kezénél lévő számot szorozzuk a jobb keze alatt lévő összes dobozzal. A későbbiekre való tekintettel a lejegyzést tanítsuk a következők alapján:

1. A diák leolvassa balról jobbra az első tagot a zárójelen belül, és összeszorozza a bal kezénél lévő tényezővel.
2. A szorzatot kimondja, majd kissé feltolja az összeszorozott két tényezőt.
3. Legépele az első részeredményt.
4. Megkeresi a két feltolt tényezőt, visszahúzza őket. Ellenőrzi, a bal kezénél lévő elemet kell-e szorozni még egyéb tényezővel. Ha igen, megismétli az első négy lépést: szorzatot kimondja, tényezőit feltolja, szorzatot leírja. Visszatér a tálcához és ellenőrzi, kell-e a bal kezénél lévő gyufásdoboz tényezőjét szorozni. Ha nem, feltolja a tálca felső pereméhez.
5. Ellenőrzi, van-e a tálca bal alsó negyedében még gyufásdoboz. Ha nincs, a feladattal készen van.

Ezen analógia mentén bővíthetünk két zárójeles polinomokra. Mivel itt nem lényeges, hogy melyik tényező tartalmaz ismeretlent és melyik nem, ha egy zárójellel megy, léphetünk tovább két zárójelre. A lépéssorozat ugyanaz. Próbáljuk a diákot rávezetni, hogy mit mivel kell majd szorozni, ne megmondjuk neki!

Természetesen tudom, a pedagógusok egy része használja csak rutinszerűen az abakuszt. Látóként nem tűnik bonyolultnak a zárójelfelbontás, hiszen mi csukott szemmel is látjuk az egyenleteket. Fogadjuk el, hogy látássérült diák tanításához nem elég mindent felolvasni. Tapasztalatom és kutatásom alapján a zárójelek felbontása nagy arányban okoz problémát a diákoknak, segítsük tehát őket ebben. Mivel ez egy elengedhetetlen pontja a gimnáziumi matematikának, ezen nem léphetnek át, nem zárhatják ki. Ezen két módszer leginkább egy látó – egy látássérült felállást kíván, de ez nem jelenti azt, hogy a pedagógusnak külön kéne foglalkozást tartania. Kooperatív formákban, esetleg egyéni feladatmegoldás közben is alkalmazható, sőt, kifejezetten ajánlott a látó diákok figyelemfelkeltése érdekében előttük csinálni. Ne felejsük el, hogy azzal, hogy a tanulók a tanáron azt érzik, hogy a sérült diák teher, egy borzasztóan elavult és teljes mértékben invalid értékrendre neveljük őket ahelyett, hogy azt mutatnánk, hogy ugyanúgy meg tud mindent tanulni a sérült diák is, csak meg kell találni a módot, a csatornát, amin megtanítom. Ahogyan a látó gyerekek ötödször is elmagyarázza a tanár, máshogy és máshogy, úgy a nem látó diáknak is megmutatom a sokadik módszert is, és közben magyarázom, mit csinálok.

Zárszó

Látássérült diákot tanítani többségi pedagógusként nem kis kihívás. De ne felejtsük el, hogy nem attól lesz valaki képtelen a matematika rejtelmeiben elmélyedni, hogy látása nem úgy viselkedik, mint a tanáráé. Pedagógusként, gyógypedagógusként vagy egyszerűen civilként feladatunk a gyermekek, diákok elfogadásra, megfelelő segítségnyújtásra nevelése, hiszen a jövő felnőttjei belőlük lesznek.

A matematika nem egy elérhetetlen cél, nem egy gonosz, ártó démon, ami elől el kell menekülni minden látássérültnek. Számos nagy matematikus bizonyítja az ellenkezőjét. Vajon hány, matematikában akár tehetséges diák fordított hátat a tárgynak, mert fölöslegesen felmentették, mert nem megfelelően oktatták, vagy mert elvették a kedvét?

A gimnáziumi matematikaoktatás látássérült diákoknak (de megemlíthetjük a tanulási zavart mutató tanulókat is) nem valósulhat meg a gyógypedagógusok és a többségi pedagógusok egymás felé nyitása nélkül. Diákjaink jövőjét elsősorban meghatározza feléjük fordulásunk, elfogadásunk, segítőkészségünk és természetesen szakmai kompetenciánk. Azzal, hogy a diákot felmentetjük az első adandó alkalommal, könyvtárba küldjük óra helyett csak azért, mert látássérült, mi, saját magunk vesszük el tőle a lehetőséget az inklúziótól. Mert nem, látássérült diákok integrációja nem abból áll, hogy amit kényelmesen tud a többiekkel tanulni, annak örülünk, a többi tárgyat pedig elfelejtjük neki. Az integráció – véleményem szerint - megfelelő megsegítést is kellene jelentsen, amivel a fogyatékkal élő és az ép fejlődésmenetű tanuló, felnőtt együtt, ugyanazt a követelményt saját erejéből képes teljesíteni. Hiszen képes rá. Nekünk csak jól kell segítenünk.

Bibliográfia

Brumbauer M. és Harmath K. (2014) Hasznos tudnivalók a mindennapi gyakorlatból. In D. Somogyi V. (szerk.) *Vak gyermek az iskolában* (pp. 149-153). Budapest: Vakok Óvodája, Általános Iskolája, Speciális Szakiskolája, EGYMI, Kollégiuma és Gyermekotthona.

C. Neményi E. és Sz. Oravecz M. (2003). *Matematika tankönyv általános iskola 1. osztály, II. kötet*. (10. kiadás). Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó.

Csahóczi E., Csatár K., Kovács Cs.-né, Morvai É., Széplaki Gy.-né és Szeredi É. (2012) *Matematika tankönyv 7. évfolyam, I. kötet*. (12., átdolgozott kiadás). Celldömölk: Apáczai Kiadó.

Csocsán E. (2014). A vak gyermekek matematika tanulása, tanítása. in D. Somogyi V. (szerk) *Vak gyermek az iskolában*. (p. 107-153). Budapest: Vakok Óvodája, Általános Iskolája, Speciális Szakiskolája, EGYMI, Kollégiuma és Gyermekotthona.

Csocsánné Horváth E. (1994.) *A matematika előkészítése vak gyermekeknek*. Budapest: Bárczi Gusztáv Gyógypedagógiai Tanárképző Főiskola Tiflopedagógiai Tanszék.

Gerőcs L., Orosz Gy., Paróczay J. és Szászné Simon J. (2009). *Matematika Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.* Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó.

Gosztonyi K. (2015). *Hagyomány és reform az 1960-as és '70-es évek matematikaoktatásában: Magyarország és Franciaország reformjainak összehasonlító elemzése*. letöltés helye: <http://doktori.bibl.u-szeged.hu/2989/>

Jackson, A. (2002). The World of Blind Mathematicians. *Notices of the American Mathematical Society*, 49 (10), 1246-1251.

Kosztolányi J., Kovács I., Pintér K., Urbán J. és Vincze I. (2008). *Sokszínű matematika 10. osztály*. (7., javított kiadás). Budapest: Mozaik kiadó.

Középszintű matematika írásbeli érettségi feladatlap, letöltés helye: http://dload.oktatas.educatio.hu/erettsegi/feladatok_2017tavasz_kozep/k_mat_17maj_fl.pdf

Középszintű matematika írásbeli érettségi megoldókulcs, letöltés ideje helye:

http://dload.oktatas.educatio.hu/erettsegi/feladatok_2017tavasz_kozep/k_mat_17maj_ut.pdf

Molnár G. (2010). Empirikus kutatási módszerek a szervezetfejlesztésben. *Humán innovációs szemle*, (1-2), 61-72.

O'Connor, J.J. és Robertson, E.F. (1998). *Leonhard Euler*. letöltés helye: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Euler.html>

Osterhaus, S. A. (2003). Teaching a blind student how to graph on a coordinate plane: no tech, low tech and high tech tools. *SEE/HEAR*, 8 (1), 19-20.

Pajor E. (2017). *Látássérülés – Sérült látás?*. Budapest: ELTE Bárczi Gusztáv Gyógypedagógiai Kar.

dr. Pálhegyi F. (1981). *A látás nélkül meghódított világ*. Budapest: Vakok és Gyengénlátók Országos Szövetsége.

Pólya Gy. (1985). *A problémamegoldás iskolája I. kötet*. (4. kiadás). Budapest: Tankönyvkiadó.

Sain M. (1986). *Nincs királyi út!* Budapest: Gondolat.

Kérdések- utólag beletéve

Az interjúalany neme;

kora;

lakhelye;

hol és mikor végezte a középiskolát;

legmagasabb iskolai végzettsége;

foglalkozása.

Közele és távoli látásélessége;

szembetegsége;

látássérülés kialakulásának ideje.

Mi volt a középiskolában a kedvenc tantárgya;

mit jelentett számára a matematika;

milyen érzései voltak a tárggyal kapcsolatban.

Felmentették-e matematikából, vagy bizonyos részeiből és ha igen, miből;

hogyan érettségizett: elektronikusan, szóban vagy felmentették?

Milyen jegyei voltak felső tagozaton, gimnáziumban illetve az érettségin matematikából (év végén);

okozott-e nehézséget a matematika, és ha igen, miben volt nehéz;

milyen volt a viszonya a tárgyat tanító pedagógussal;

mennyire érezte őt segítőkésznek;

volt-e külön tanára, és ha igen, hányszor egy héten;

az iskola segített-e korrepetálással, és ha igen, hányszor, illetve hatékony volt-e.

Volt-e tankönyve, és ha igen, melyik;

az osztálya milyen tankönyvet használt (ha neki nem volt, vagy más).

A felsorolt témakörök közül melyiket mennyire értette a gimnáziumban, saját szavaival: egy ismeretlenes egyenletek, egyenletrendszerek, gyökvonást tartalmazó egyenletek, másodfokú egyenletek, trigonometrikus egyenletek, logaritmust tartalmazó egyenletek, exponenciális egyenletek. Lineáris függvények, abszolútértéket tartalmazó függvények, másodfokú függvények, racionális törtfüggvények, előjel – egészrész – törtrészfüggvény, négyzetgyökfüggvények, exponenciális függvények, logaritmus függvények.

Meg tudna-e oldani egy problémát, ha szembe kerülne vele.

Oldja meg a egyenletet (valós számok halmazán)!

$$3 * (x - 3) + (5 + x)(x + 1) = (x + 4)^2$$

Egy egyenes hány rácsponton (koordináta táblán lyukon) mehet át a derékszögű koordinátarendszerben?

Nyilatkozat

Alulírott kijelentem, hogy az Eötvös Loránd Tudományegyetem Bárczi Gusztáv Gyógypedagógiai Karon benyújtott *Látássérült diákok a középiskolai matematika világában* című szakdolgozatomban foglaltak más személyek jogszabályban vagy a Gyógypedagógiai Kutatásetikai Alapelvekben lefektetett jogait nem sértik.

Dolgozatom önálló szellemi tevékenységem eredménye, amelyben mások elméleti és kutatási eredményeit jogosulatlan módon és hivatkozás nélkül nem használtam föl.

Dátum: 2018.02.22.

A handwritten signature in cursive script, reading "János Rita". The signature is written in a light grey or blue ink.

Aláírás

Témavezető ellenjegyzése: