

Tanári szakdolgozat

Tanulmány

Felfedezettő matematika

Témavezető: dr. Hegyvári Norbert (főiskolai tanár)

ELTE Matematikai Intézet

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Budapest, 2013.

Tartalom

I.	Bevezetés	3
II.	Történeti áttekintés	4
III.	Fedezzük fel a bizonyításokat!.....	7
3.1.	A háromszög oldalai közti összefüggések.....	7
3.1.1.	A Pitagorasz-tétel.....	7
3.1.1.1.	„Geometriai legó”	8
3.1.1.2.	A „geometriai legó” tapasztalatai.....	11
3.1.2.	Koszinusztétel	13
3.1.2.1.	A koszinusztétel hegyesszögű háromszögekre vonatkoztatott formája	14
3.1.2.2.	A koszinusztétel tompaszögű háromszögekre vonatkoztatott formája.....	17
3.2.	Csuklós sokszögek	18
3.2.1.	A háromszög oldalai által való egyértelmű meghatározottsága	19
3.2.2.	A csuklós négyszögek „nem merevsége”	20
3.2.3.	A csuklós paralelogrammák mindig paralelogrammák	21
3.2.4.	A csuklós paralelogrammák átlóinak négyzetösszege	22
IV.	Téglalap és négyzet feldarabolása négyzetekre	25
4.1.	Négyzet nem tökéletes darabolása négyzetekre.....	25
4.2.	Algebrai eszközökkel segített tökéletes darabolás.....	29
4.2.1.	Téglalap darabolása négyzetekre	29
4.2.2.	Négyzet darabolása négyzetekre.....	31
V.	Hogyan oldjunk meg matematikai feladatokat?	34
5.1.	Feladat.....	34
5.2.	Feladat.....	40
5.3.	Feladat.....	44
VI.	A hibák szerepe a matematikaoktatásban	56
VII.	Összefoglalás.....	60
VIII.	Idézett forrásmunkák.....	62
IX.	Köszönetnyilvánítás	64

I. Bevezetés

Bemenni az órára, felírni a tételt, bebizonyítani, gyakoroltatni (lehetőleg jó sokat), majd dolgozatot íratni, végül azon sopánkodni, hogy ezek a mai diákok semmit sem tanulnak – valóban ennyiből állna egy matematikatanár feladata? Rövid szakmai tapasztalatom¹ azt mondatja velem, hogy semmiképpen sem. Szakdolgozatom célja, hogy konkrét példákon keresztül bemutassa a felfedezettő matematika módszerét, s annak saját tanári munkámban való alkalmazását. Néhány, a módszerrel kapcsolatos sikerélményre alapozva azt látom, a matematika felfedezettése méltó a tudományok királynőjének oktatásához.

A matematika felfedezettő módszerű oktatása nem csak egy adott tananyagrészhöz vagy bizonyos témakörökhöz köthető, ezt a változatosságot próbáltam meg szakdolgozatomban is érzékeltetni. Fontosnak tartottam, hogy dolgozatom II. fejezetében bemutassam a módszer történeti kialakulását és fejlődését. Arra is nagy hangsúlyt fektettem, hogy a bemutatást ne korlátozzam le csupán a feladatmegoldásokra, vagy csak a bizonyításokra, ezért dolgozatomban mindkettővel foglalkozok: egyes matematikai bizonyítások felfedezettő módszerrel történő oktatását a III., a feladatmegoldásokat az V. fejezetben tárgyalom. A munkám IV. fejezete a téglalapok és négyzetek tökéletes illetve nem tökéletes darabolásának példáján keresztül mutatja be a felfedezettés nagyszerű lehetőségeit az érdeklődőbb (például szakkörös) diákok számára is. Írásom VII., egyben utolsó fejezete a matematikai feladatok során megoldott hibákról, a helyes hibakultúra kialakításáról, és annak előnyeiről szól.

¹ 2012 szeptembere óta vagyok a Neumann János Számítástechnikai Szakközépiskola matematika és kémia tanárnője

II. Történeti áttekintés

A felfedezettő (másképpen: heurisztikus) tanítás első feljegyzett alkalmazása Szókratészhez köthető: konkrét tapasztalatokból mesterien feltett kérdések sorozatán keresztül juttatta el tanítványát az általános igazságokig, míg ő maga végig háttérben maradt. [1] Oktatási módszere tehát induktív volt.

Szókratész óta azonban eltelt több mint két évezred. A heurisztikus oktatás mondhatni mellőzött volt, mígnem a XIX-XX. század fordulóján induló reformpedagógia mozgalmak újra rátaláltak [1]. Az ipari fejlődés, a technika korszerűsödése egyre inkább igényelték a matematika és vele együtt a természettudományok mélyebb oktatását is. 1957. október 4-én Szovjetunió pályára állította az első műholdját, s ez az esemény különösen az Amerikai Egyesült Államokban okozott hatalmas megdöbbenést, melyet a történelem „szputnyik-sokk” néven örökített meg. A sokkot követően számos matematika és természettudományos oktatásmegújító kezdeményezés indult meg az USA-ban, s ezek a törekvések terjedtek el minimális időkülönbséggel Nyugat-Európában, illetve néhány közép- és kelet-európai országban is [2].

A felfedezettő tanítás matematikában és a természettudományokban megújult gyökerei ily módon az 1950-es évek Amerikájából származnak, s elsősorban a konstruktivista pedagógiai mozgalmakhoz köthetők. A nemzetközi szakirodalomban „inquiry based learning”-ként emlegetett oktatási módszer rokon mind a kutatásalapú (researched based), mind a dizájnalapú (design based), mind pedig a problémaalapú (problem based) tanulással, ezért többféleképpen is kivitelezhető [3].

A szakirodalom a tanár feladatait a felfedezettő tanulás során a következő pontokba sorolja [4]:

- a tanulók megismertetése a főbb célokkal
- a kiinduló kérdések megfogalmazása, a felfedezés, a megbeszélés szabályainak kialakítása
- a megbeszélés nyomon követése, háttérből történő irányítása, esetleg saját vélemény közlése

- a következtetések megfogalmazásának elősegítése
- a végrehajtott gondolkodási műveletek tudatosítása, rögzítése

A modern matematikai heurisztika atyjának és kidolgozójának Pólya György magyar matematikust tartják, aki a Standfordi Egyetemen való professzorsága alatt írta meg matematikadidaktikával kapcsolatos nézeteit. Pólya György egy matematikai probléma megoldásának lépéseit négy pontba foglalja össze [5]:

- Értsd meg a feladatot
- Készíts tervet
- Hajtsd végre a tervedet
- Vizsgáld meg a megoldást

Pólya György többször hangsúlyozza, hogy mindezekben a lépéseken a diáknak kell végighaladnia, a tanár csupán segítséget nyújt azokon a helyeken, ahol a diák elakad. A segítség rávezető kérdések feltevésével valósul meg, de a diák saját maga jön rá a megoldásra. Pólya nagy hangsúlyt fektet a megfelelő feladat kiválasztására és a jól kérdezés technikájára is. Szerinte a feladat kiválasztásánál figyelembe kell venni a tanulók egyéni sajátosságait: a feladat keltse fel a diák érdeklődését, s annak egyéni képességeihez mérten ne legyen túl nehéz (a diák előzetes tudásával és eszközeivel megoldható legyen), de megoldása mindig erőfeszítést igényeljen, hiszen csak a fáradtságos munkával kapott eredmény nyújt igazi sikerélményt. A megoldáshoz elvezető kérdések pedig lépésenként mutassanak rá a diákok előzetes tudására, feladat megoldási tapasztalataira úgy, hogy közben ne tartalmazzák már elve a választ is, hiszen épp ez fosztja meg a diákot a megoldási örömtől.

Az 1960-as évek végén egy Hans Freudenthal nevű holland matematikus is a Pólya Györgyéhez hasonló matematikadidaktikai nézeteket kezdett el hangoztatni, az általa kitalált oktatási módszert realiztikus matematikának nevezte el. Lényegét és célját a matematika hasznosságának és mindennapi életre való alkalmazásainak oktatásán túl abban is megfogalmazta, hogy a matematikával való foglalkoztatás folyamata sokkal fontosabb, mintha csak késztermékként adnánk diákjainknak oda a matematikát. „A világ a feje tetejére állna – mondja Freudenthal – ha a matematikai eredményeket tanítanánk meg azon folyamat megtanítása helyett, amely során az eredmények megszületnek”. [6]

Joggal tehetjük fel a kérdést, hogy mindebből mi jutott el Magyarországra. 1963-ban Budapesten Varga Tamás vezetésével megkezdődött a komplex matematikatanítási kísérlet, melynek alapgondolata az volt, hogy a matematikát egységes egésznek tekintve kell átadni, mindemellett figyelembe kell venni a tanulók egyéni sajátosságait, fejlődési lehetőségeit, és valóságát, a mindennapi életéhez kapcsolódó matematikát kell tanítani. E szemléletre nagy hatással voltak Pólya György korábban tárgyalt nézetei is: a gyerek felfedező tevékenysége által aktív részese kell, hogy legyen a tanítási folyamatnak [2].

A komplex matematikatanítási kísérleten alapuló 1978-as tantervben bár nem valósultak meg maradéktalanul az eredeti elképzelések, a matematika tanításának alapkoncepciójára mégis jó hatással voltak Varga Tamás elképzelései, hiszen a matematikatanítás megfogalmazott célja ezek után már nem az ismeretátadás, hanem a gyerek egyéni fejlesztése minden olyan területen, ahol a matematikával való foglalkozás fejlesztő hatású lehet. [7]

A mai magyarországi matematikaoktatásnak is számos kritikája van, a felmerülő problémák azonban nem újak. Probléma például az, hogy bár a NAT csupán induktív jellegű matematikaoktatást céloz meg az alsóbb osztályokban, ennek ellenére az elemi iskolás tanítók zöme deduktívan tanít, mert ehhez szokott hozzá. Ugyanígy probléma az is, hogy a tanárok úgy érzik, nincs idejük a heurisztikus matematikaoktatásra, mert az rendkívül időigényes [7]. Egyesek hibát látnak a matematika tananyagának utóbbi években bekövetkezett szűkítésében és az újfajta érettségi követelményrendszerben [8], mások pedig egyenesen a matematikaoktatás szükségszerűségét kérdőjelezi meg mondván, aki ért hozzá, azt szinte nem kell tanítani, aki pedig nem ért hozzá, azt meg úgyis felesleges [9].

Minden hibát lehetetlen kiküszöbölni, és minden problémát képtelenség megoldani, viszont a felfedezett matematikaoktatási módszer egy lehetőség arra, hogy a matematikát ne szárazan, hanem a diákok számára érdekesen és élvezhetően tanítsunk. Ilyen lehetőségekkel pedig kár lenne nem élni!

III. Fedezzük fel a bizonyításokat!

Gyakorló pedagógiai pályám első évében egy olyan tapasztalatra tettem szert, mely hiszem, hogy egész tanári munkásságomnak jelentős mérföldköve lesz. Mikor egy normál tanmenetű kilencedikes osztályban tartott matematika órán a háromszög szögeiről volt szó, általános iskolában szerzett előtudásukra támaszkodva természetesen az osztály minden tanulója tudta, hogy a háromszög belső szögeinek összege 180° . Merészen és ügyetlenül tettem fel a kérdést: be tudja valaki bizonyítani ezt az állítást? Erre egy diák azt mondta, ő a táblánál meg szeretné mutatni a bizonyítást. Vette a körzőt, vonalzót, ügyesen megszerkesztett egy háromszöget, majd szögmérővel gondosan megmérve a háromszög egyes szögeit, azokat összeadta, s eredményként 180° -ot kapott. Módszerét senki sem ellenezte, látszólag mindenki egyetértett vele. Ekkor értettem meg igazán, hogy a matematikai bizonyítás fogalma egyáltalán nem evidens egy tizenöt éves gyerek számára.

Mivel legfőképpen kilencedikeseknek tanítok matematikát, (összesen 4 kilencedikes csoportom van), ezért főként az ő tananyaguk egy-egy részleténél használtam a felfedeztető matematika módszereit, mindemellett azonban néhány felsőbb évfolyamhoz vagy szakkörhöz kapcsolódó igazolást vagy feladat-megoldást is közlök. Dolgozatom következő részében ezekről lesz szó.

3.1. A háromszög oldalai közti összefüggések

3.1.1. A Pitagorasz-tétel

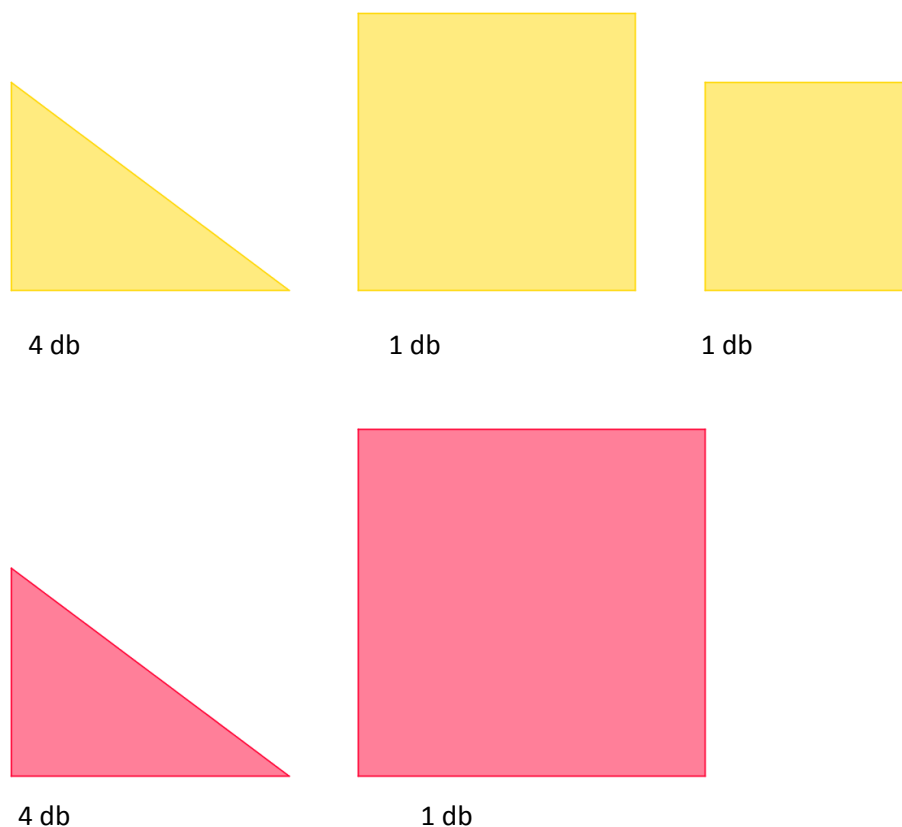
Derékszögű háromszög átfogójának négyzete egyenlő a két befogó négyzetének összegével.

A tétel, valamint annak számos bizonyításával együtt jól ismert. A folytatásban egy olyan játékot közlök, mely a tétel egyik bizonyításának szemléletességét felhasználva vezeti el a diákokat arra, hogy ők maguk fogalmazzák meg azt.

3.1.1.1. „Geometriai legó”

Eszközök:

Két eltérő színű alakzatot tartalmazó csomag, az egyik legyen például piros, a másik sárga. (1. ábra)



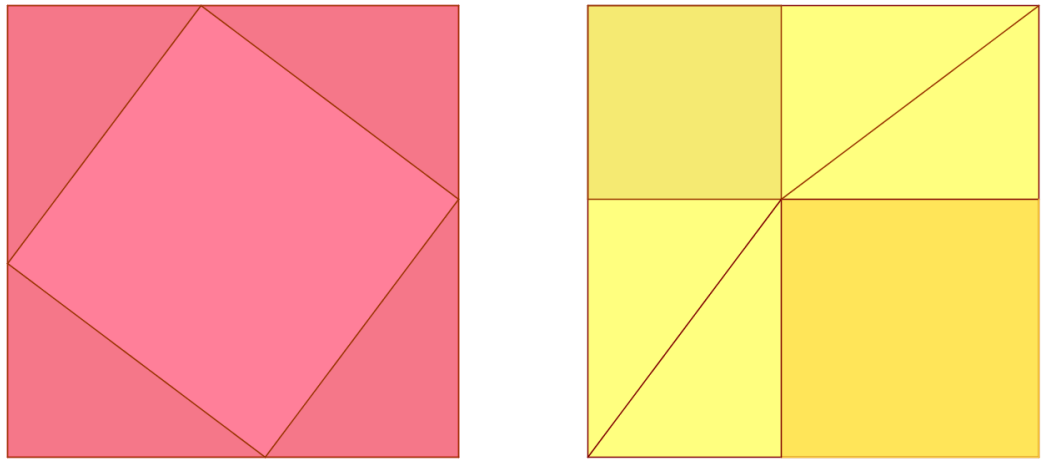
1. ábra

Feladat:

- 1) A különböző színű alakzatok felhasználásával alkoss egy-egy négyzetet!
- 2) Hasonlítsd össze az így keletkezett két négyzetet!
- 3) Szedd ki mindkét kirakott négyzetből a 4 derékszögű háromszöget!
- 4) Hasonlítsd össze a megmaradt darabok területét!

Megjegyzések:

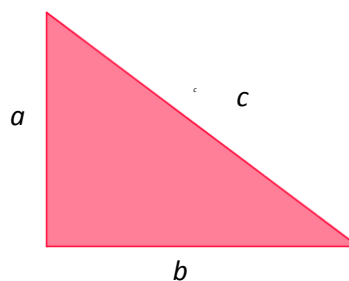
Remélhetőleg a tanulók eljutnak a következő két összerakott négyzethez (2. ábra)



2. ábra

A 2. kérdésre adott válasz egyértelmű: a két négyzet területe egyenlő. Az is világos, hogy a négy-négy derékszögű háromszög egybevágó, tehát ha ezeket a fenti nagy négyzetekből elvesszük, szükségszerű, hogy az elsőből megmaradt nagy négyzet területe egyenlő legyen a két sárga négyzet összegével.

Ha a diákok jó absztrakciós készséggel rendelkeznek, a következő jelölést bevezetve (3. ábra) rögtön eljutunk a Pitagorasz-tételhez:



3. ábra

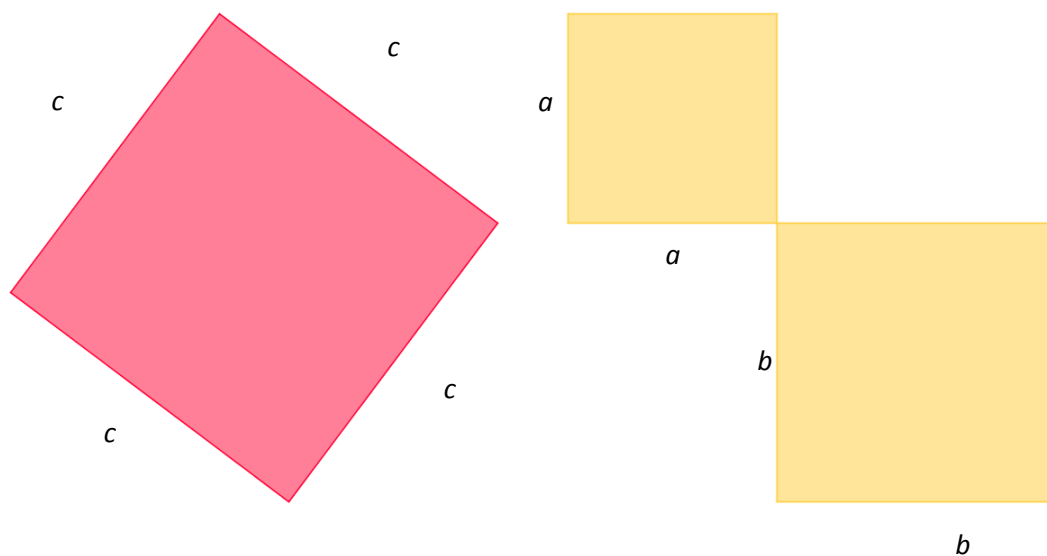
5) Rakd össze újra a két négyzetet, majd ismét szedd le az egybevágó háromszög-darabokat!

6) A fenti jelölést használva számítsd ki mindkét megmaradt rész területét!

7) Mit tudsz elmondani a megmaradt területekről?

Megjegyzések:

A Pitagorasz-tétel bizonyítása után végre elérkeztünk a kimondásához is. A 4-4 egybevágó háromszög leszedése után pontosan a következő négyzeteket kapjuk (4. ábra):



4. ábra

Mivel azonos területű négyzetekből kiindulva azonos területű háromszögeket vettünk el, ezért nyilvánvaló, hogy a megmaradt területek is azonosak lesznek.

Azaz:

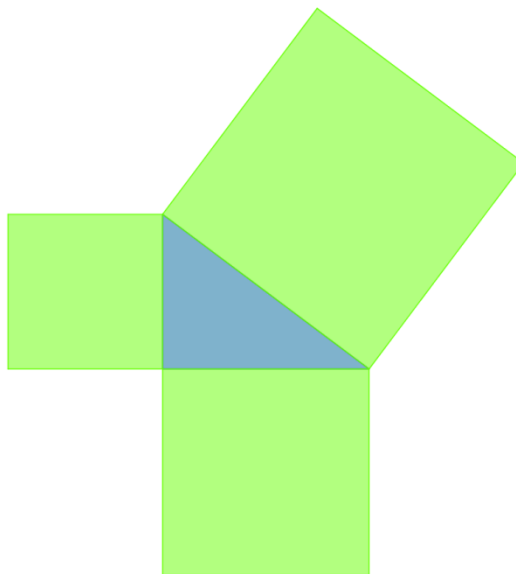
$$c^2 = a^2 + b^2$$

A derékszögű háromszögekben a -val és b -vel jelöltük a befogókat, c -vel az átfogót:

Tétel (Pitagorasz):

A derékszögű háromszög átfogójának négyzete egyenlő a befogók négyzetének összegével.

Megmutathatjuk, hogy ez szemléletesen azt is jelenti, hogy a derékszögű háromszög befogóira emelt négyzetek területének összege megegyezik az átfogóra emelt négyzet területével (5. ábra):



5. ábra

3.1.1.2. A „geometriai legó” tapasztalatai

A fent közölt bizonyítás általánosan ismert (ez az igazolás található például a [10] és a [11] tankönyvekben is). Hogy felmérjem, van-e különbség ugyanannak a bizonyításnak a „tábla-kréta” módszeres közlése és a fentebb ismertetett „játék” között, ezért a 9. c. osztály 1. és 2. számú csoportjaiban különbözőképpen tanítottam: az első csoportnak a „geometriai legó”, a második csoportnak pedig frontálisan, táblán szemléltetett magyarázat kíséretében.² Általános összehasonlító jellegű megfigyeléseimet a következő pontokba gyűjtöttem össze:

- Az 1. számú csoportban a színes eszközök kiosztása már önmagában motiváló hatású volt.
- A négyzetek kirakása kihívást jelentett a tanulók számára. Míg a 2. ábra bal oldali négyzetének kirakása a csoport zömének nem jelentett problémát, a jobb oldali sárga négyzetet csupán 2 diák tudta elsőre kirakni, hosszabb-

² Az osztály tanulóinak csoportba sorolása nem matematika, hanem angol nyelvi tudásszintjük alapján történik, így mindkét csoport inhomogén összetételű a matematika tekintetében.

rövidebb próbálkozás után végül mindenkinek sikerült, ez néhány tanulónak meglepően nagy sikerélményt jelentett.

- A derékszögű háromszögek egybevágóságát az 1. számú csoportbeli tanulók rögtön kijelentették. Miután ténylegesen elvették ezeket a derékszögű háromszögeket (4. ábra), könnyebben jutottak el ahhoz gondolathoz, hogy „mivel egyforma négyzetekből egyforma háromszögeket vettünk el, a megmaradt alakzatok területe is egyforma”. Egy-két diák kivételével ezt szinte mindenki megértette.

- Mivel a négyzet területképlete is jól ismert, ezért a két alakzat területének kiszámítása sem jelentett különösebb gondot.

- Plusz időigényt jelentett ugyan a bizonyítás leírása is, de így, hogy már látták, honnan indulunk és hová akarunk eljutni, ez is könnyebben ment.

- A 2. számú csoport szorgalmasan leírta a tábláról a bizonyítást.

- Azt vettem észre, hogy vagy írnak, vagy figyelnek a tanulók, mindkettő egyszerre nem megy. Ráadásul a leírt szöveg számukra érthetetlen volt elsőre és ijesztő is, még akkor is, ha egyszerű dolgokat takart.

- A visszajelzésekből, válaszokból kitűnt, hogy a csoport zöme vagy nem értette, vagy csak egy részét értette a bizonyításnak.

- Következő matematika órán velük is eljátszottam a geometriai legót, kérdésekre, hogy ki az, aki előző órán nem értette a bizonyítást, s most megértette, többen felemelték a kezüket.

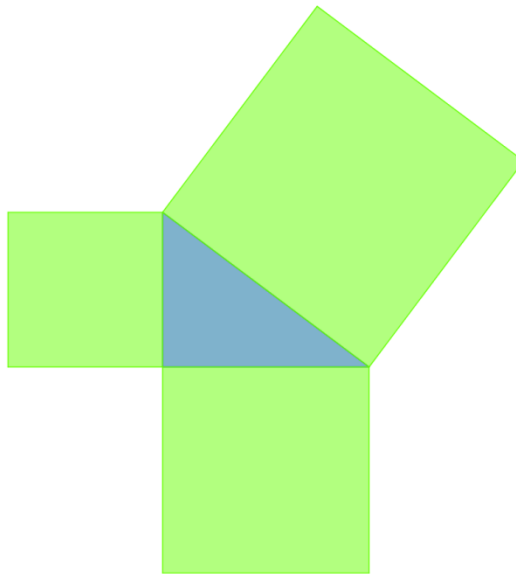
Összességében elmondható, hogy kevesebb idő ment el a Pitagorasz-tétel frontális bizonyításával, mint az interaktívval, viszont az utóbbi sokkal hatékonyabbnak bizonyult. Véleményem szerint egyrészt azért volt ez így, mert a kirakós játék által sikerélményt adott a matematikát nem igazán kedvelő diákoknak is, másrészt, mert sokkal kézzelfoghatóbb volt, harmadsorban pedig azért, mert a diákok saját maguk fogalmazták meg illetve fedezték fel a bizonyítás egyes kulcsfontosságú elemeit, ami által az „élmény” sokkal maradandóbbá vált.

3.1.2. Koszinusztétel

Bármely háromszögben az egyik oldal négyzetét megkapjuk, ha a másik két oldalának négyzetösszegéből kivonjuk e két oldal és az általuk közbezárt szög koszinuszának kétszeres szorzatát.

A középiskolai tananyagban a koszinusztételt deduktívan vezetik be: közlik a tételt, majd bizonyításához általában a skalárszorzatos módszert használják fel. A következőkben egy a szakirodalomban tárgyalt bizonyítás ötlete alapján [12] egy olyan induktív tárgyalási módot mutatok be, melyek során a diákok önmaguk „fedezik fel” a koszinusztételt.

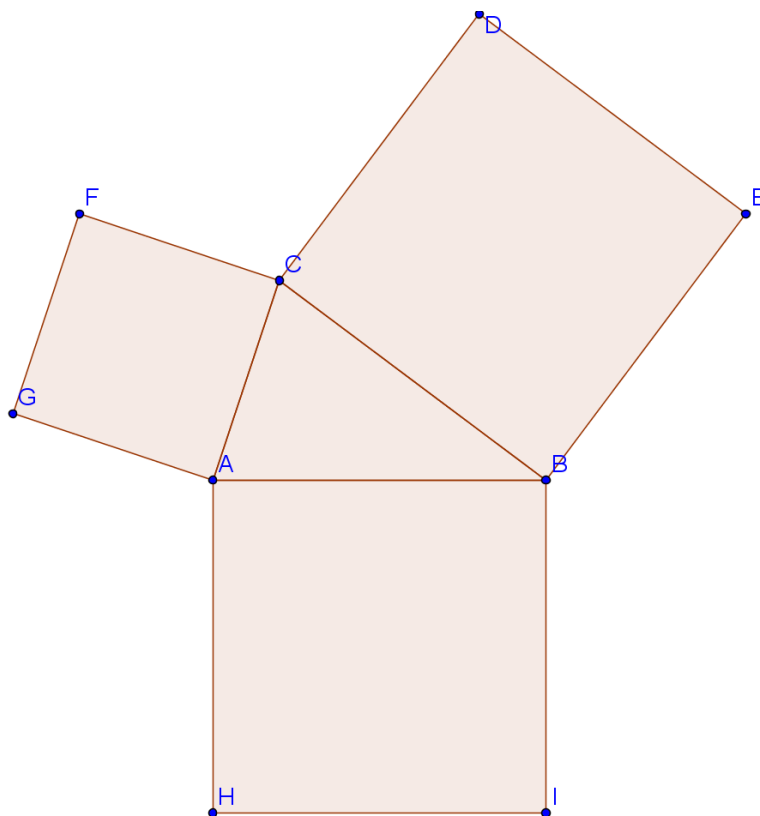
A tétel bevezetését kezdhethük azzal, hogy felelevenítjük a Pitagorasz-tételt és az azzal az előbbieken már megfogalmazott ekvivalens állítást, mégpedig azt, hogy a derékszögű háromszög befogóira emelt négyzetek területeinek összege megegyezik az átfogóra emelt négyzet területével (6. ábra):



6. ábra

3.1.2.1. A koszinusztétel hegyesszögű háromszögekre vonatkoztatott formája

A tétel bevezetését a következő ábra bemutatásával kezdhetjük (7. ábra):



7. ábra

Az ábrán egy hegyesszögű $ABC \triangle$ oldalaira emelt négyzeteket látunk.

Legyen CAB szög $= \alpha$.

Kérdezzük meg, hogy milyen az α szöggel szemben fekvő CB oldalra emelt négyzet területe a másik négyzet területéhez képest. El is mondhatjuk, hogy a Pitagorasz-tétellel analóg módon a hegyesszögű háromszögekre szeretnénk egy tételt megfogalmazni. Tudjuk, hogy a Pitagorasz-tételben a derékszöggel szemben fekvő oldalra (átfogóra) emelt négyzet területe megegyezik a másik két oldalra emelt négyzet területének összegével. A kérdésünk tehát arra vonatkozik, hogyan viszonyul egy nem derékszögű háromszög hegyesszögével szembeni oldalra emelt négyzet területe a másik két oldalra emelt négyzet területéhez.

Ha szükséges, több konkrét példán keresztül is elvezethetjük a diákokat a sejtéshez. A konkrét példák alatt azt értem, hogy különböző papírháromszögek oldalait

megmérve számítsák ki egy-egy hegyesszöggel szembeni oldalra emelt négyzet területét, és azt hasonlítsák a másik két háromszög területéhez.

Példa

Egy háromszög oldalai 4 cm, 4 cm és 5 cm hosszúak. Szerkeszd meg a háromszöget! Számítsd ki az egyes oldalakra emelt négyzetek területét! Kettőt-kettőt összeadva közülük viszonyítsd ezt a harmadik négyzet területéhez!

Több az előzőekhez hasonló példát felhasználva eljuttathatjuk diákjainkat oda, hogy megfogalmazzák a következő sejtést:

Háromszögben a hegyesszöggel szemközti oldalra emelt négyzet területe kisebb, mint a hegyesszöget bezáró két oldalra emelt négyzetének területösszege.

Mindezek után térjünk rá a bizonyításra, de lehetőleg ne direkt módon igazoljunk, hanem hagyjuk, hogy egy-két segítő kérdés után maguk jöjjenek rá a dolog nyitjára, saját „felfedezéseik” kapcsán jobban megértve ezáltal a lényegét.

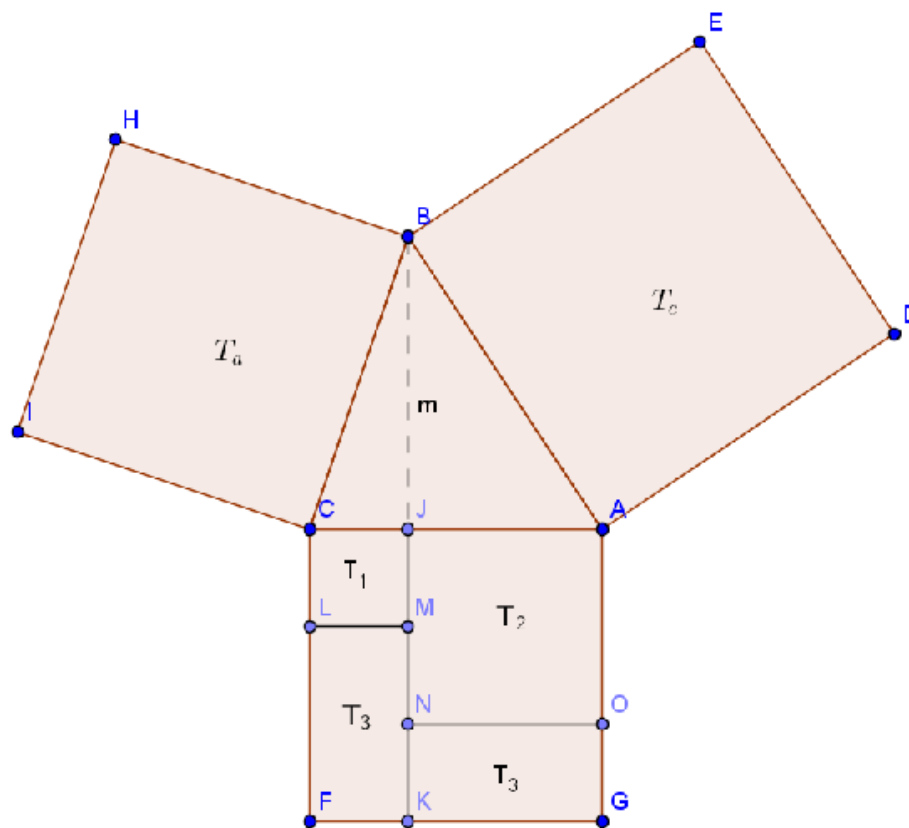
Amit el szeretnénk érni, az az, hogy az alábbi ábrán látható magasság behúzásával, illetve az AC oldalra emelt négyzet felosztásával a Pitagorasz-tételt felhasználva bizonyítsuk be az állítást, ugyanis pont ez az, amiből a koszinusztétel ki fog jönni.

Az állítás bizonyításához próbáljuk meg felhasználtatni a Pitagorasz-tételt, azaz mondjuk tanítványainknak, hogy keressenek olyan derékszögű háromszögeket az $ABC\Delta$ háromszögben, amelyre a Pitagorasz-tételt alkalmazni tudják. Ehhez nyilvánvalóan szükséges az egyik magasság ábrázolása (8. ábra) (a mi ábránkon az m-el jelölt AC oldalra bocsátott magasság).

Ezzel a lépéssel két derékszögű háromszög keletkezett: $BJA\Delta$ és $BJC\Delta$. Mindkettőre alkalmazni tudják a Pitagorasz-tételt. Ehhez azonban a CJ és JA oldalakra is négyzeteket kell emelni, vagyis fel kell osztani az AC oldalra emelt négyzetet. (könnyen látható, hogy MK két egyforma területű téglalapra osztja fel a fennmaradó területet).

Legyen: T_m = az m-re emelt négyzet területe

$$T_b = a \cdot b \text{ (=AC) oldalra emelt négyzet területe } (T_b = T_1 + T_2 + 2T_3)$$



8. ábra

A 8. ábra jelöléseivel ekkor:

$$T_c = T_m + T_2$$

$$T_a = T_m + T_1$$

De mivel mi a T_c , T_a és T_b között akarunk összefüggést találni, ezért a 2) egyenletet átalakítjuk

$$T_m = T_a - T_1 \text{ formába.}$$

Ekkor:

$$T_c = T_a - T_1 + T_2$$

Viszont a T_b -ről tudjuk, hogy:

$$T_b = T_1 + T_2 + 2T_3$$

Vagyis:

$$T_c = T_a + T_b - 2T_1 - 2T_3 = T_a + T_b - 2(T_1 + T_3) = T_a + T_b - 2T_{CJKF}.$$

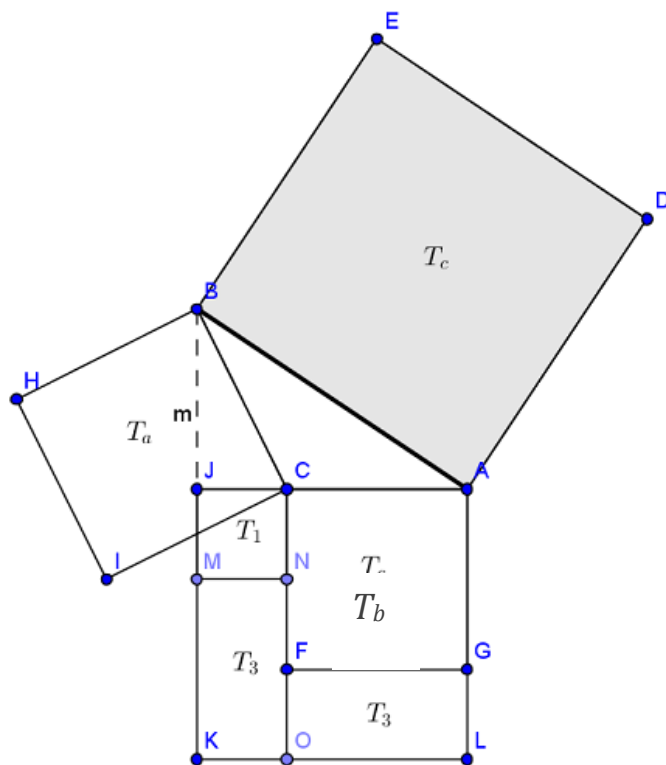
Az állítást itt bebizonyítottuk, viszont ha diákjainkat megkérjük, hogy fejezzék ki a CJKF téglalap területét a háromszög oldalai segítségével, akkor $CJ = a \cos \gamma$ és $JK = b$ egyenlőségből adódik, hogy: $T_{CJKF} = abc \cos \gamma$, ebből pedig:

$$T_c = T_a + T_b - 2abc \cos \gamma$$

Ezzel be is bizonyítottuk a koszinusztétel hegyesszögű háromszögre vonatkozó formáját.

3.1.2.2. A koszinusztétel tompaszögű háromszögre vonatkoztatott formája

Ezután megkérdezhetjük, hogy mi a helyzet akkor, ha egy tompaszöggel szemben fekvő oldalra emelt négyzet területére akarunk hasonló összefüggést felírni. Ez esetben (9. ábra):



9. ábra

Legyen: T_m = az m magasságra illeszkedő (ábrán nem jelölt) négyzet

T_2 = az AJ oldalra illeszkedő négyzet, ahol J az AC oldalra bocsátott magasság talppontja

Az előző gondolatmenetet követve és az ábra jelöléseit használva kapjuk:

$$T_c = T_m + T_2$$

$$T_m = T_a - T_1, \text{ azaz:}$$

$$T_c = T_a - T_1 + T_2$$

De mivel T_a , T_b és T_c között akarunk összefüggést felírni, és $T_2 = T_1 + 2T_3 + T_b$, vagyis:

$$T_c = T_a - T_1 + T_1 + 2T_3 + T_b$$

$$T_c = T_a + T_b + 2T_3$$

Ami pontosan azt jelenti, hogy:

A háromszögben a tompaszöggel szembeni oldalra emelt négyzet területe nagyobb, mint a másik két oldalra emelt négyzetek területének összege.

Ezzel ráadásul megkaptuk a koszinusztétel tompaszögű háromszögekre vonatkozó formáját is, ugyanis:

$$T_3 = ab \cos(180 - \gamma) = -ab \cos \gamma$$

Végül tehát, akár csak a hegyesszögű háromszögnél:

$$T_c = T_a + T_b - 2ab \cos \gamma$$

■

3.2. Csuklós sokszögek

Már az általános iskolás diákok is tudják, hogy egy háromszöget egyértelműen meghatározza a három oldala, azaz az ugyanazokból a szakaszokból álló háromszögek

mind egybevágóak. Ezt a tulajdonságot használják ki például a háromszögek szerkesztésénél is.

Sokszögek esetében viszont nem ilyen egyszerű a helyzet. Egyforma szakaszokból meghatározott sorrendben különböző sokszögeket készíthetünk. Szemléletesen a csuklók segítségével magyarázhatók meg: adott oldalakkal és az oldalak meghatározott sorrendjével rendelkező n -szögeket úgy kapunk meg, hogy az oldalakat egymáshoz csuklókkal rögzítjük, és a csuklók által engedett lehetőség szerint alakítjuk a sokszöget.

A következőkben a szakirodalomban található csuklós sokszögekkel kapcsolatos néhány tétel [13] iskolai feldolgozásának egy lehetséges, felfedeztető módszerrel történő tárgyalását mutatom be.

Amennyiben a barkácsolást kedvelő emberek vagyunk, ténylegesen is előállíthatunk csuklós sokszögeket. Ellenkező esetben meghatározott hosszúságú pálcikákból álló készlet is megteszi, hiszen ezekkel ugyanazt tudjuk szemléltetni egy-egy sokszög összerakásánál, mint amit a csuklós szerkezetekkel tudnánk.

Az általános iskolai matematikatanítás során, akár elemi osztályokban is feladhatjuk a következő feladatot:

3.2.1. A háromszög oldalai által való egyértelmű meghatározottsága

A feladat célja:

A tanulók megértsék, hogy a háromszög oldalai egyértelműen meghatározzák a háromszöget.

Szükséges eszközök:

Minden diáknak egy 2, 3 és 4 cm hosszú pálcákból álló készlet.

A feladat leírása:

Készíts háromszöget a pálcákból.

Tapasztalatok:

Minden elkészített háromszög egybevágó.

(Kisebбекnél nem feltétlenül kell használnunk az egybevágóság fogalmát, egyszerűen nevezhetjük egyformának. Szemléletesen azt is mondhatjuk, hogy a látszólag különböző háromszögek „ugyanolyanok”, és azt, hogy két háromszög ugyanolyan, úgy döntjük el, hogy egymásra téve teljesen lefedik egymást).

3.2.2. A csuklós négyszögek „nem merevsége”

A feladat célja:

A diákok tapasztalati úton felismerjék, hogy egy csuklós négyszög nem merev.

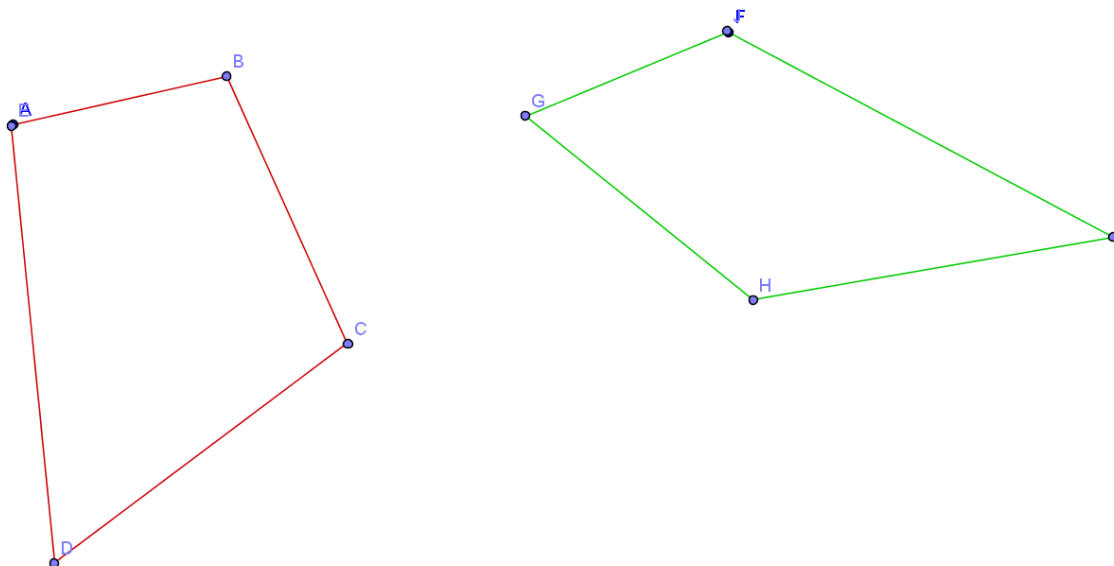
Szükséges eszközök:

Mindenki kapjon egy 3 cm, 4 cm, 5 cm és 6 cm hosszúságú pálcákból álló készletet

A feladat leírása:

Készíts négyszöget a fenti rudakból úgy, hogy az oldalak egymást növekvő sorrendben kövessék.

Tapasztalat: Különböző négyszögek készíthetők. Például a 10. ábra szemléltet két ilyen (a négyszögek oldalai az ábrán kicsinyítve, de méretarányosan vannak feltüntetve)



10. ábra

Megjegyzés: Az adott feladathoz is kitűnően használható a GeoGebra program.

A pálcikákat meghatározott hosszúságú szakaszokkal helyettesíthetjük, melyeket



a program geometriai munkaasztalán a Szakasz adott hosszal nevű funkcióval tudunk megszerkeszteni (11. ábra). Érdemes úgy szerkeszteni a szakaszokat, hogy egyik végpontja a másik kezdőpontjába essen. Az adott hosszúságú egybecsatolt egy-egy



végpontját aztán csuklószerűen mozgathatjuk a Mozgatás nevű funkcióval: (kivétel az ily módon keletkezett nagy szakasz első és utolsó végpontja, de természetesen az a cél, hogy ezeket egymásba illesszük, hiszen csak így kapunk négyszöget.



11. ábra

3.2.3. A csuklós paralelogrammák mindig paralelogrammák

A feladat célja:

A diákok tapasztalataik során megfogalmazzák, hogy ha a csuklós négyszög egy helyzetében paralelogramma, akkor minden helyzetében az.

Eszközök:

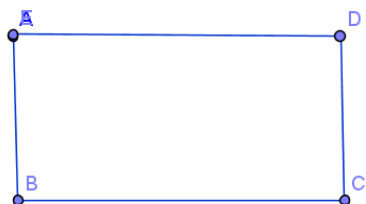
2 db 2 cm-es és 2 db 4 cm-es pálcikából álló készletet kapjon minden gyerek.

A feladat leírása:

Készíts az adott eszközökből négyszöget úgy, hogy az oldalak 2-4-2-4 cm-es sorrendben kövessék egymást.

A feladat tapasztalatai:

Minden esetben paralelogrammát kapunk. Ebből két különbözőt szemléltet a 12. ábra is.



12. ábra

A tapasztalatok megbeszélése során megkérdezhetjük, hogy lehetséges-e, hogy a megadott pálcikákból ugyanebben a sorrendben ne paralelogrammát készítsünk.

A válasz természetesen az, hogy nem, hiszen a két-két szemközti oldal egybevágó lesz, ami biztosítja a négyszög paralelogramma voltát.

3.2.4. A csuklós paralelogrammák átlóinak négyzetösszege

A feladat célja:

A diákok felfedezzék, hogy a csuklós paralelogramma átlóinak négyzetösszege egyenlő a paralelogramma oldalainak négyzetösszegével.

Szükséges eszközök:

2 db 2 cm-es és 2 db 4 cm-es pálcikából álló készlet, vonalzó.

A feladat leírása:

Az adott eszközökből készíts különböző paralelogrammákat. Mindegyiknél mérd meg a két átló hosszát, majd töltsd ki a következő táblázatot (a táblázat csupán minta, mivel a feladat célja minél több paralelogramma készítése, ezért kettőnél több sora legyen).

A paralelogramma sorszama	Az átlók hossza (cm)		Az átlók négyzetösszege $e^2 + f^2$
	e	f	
1			
2			

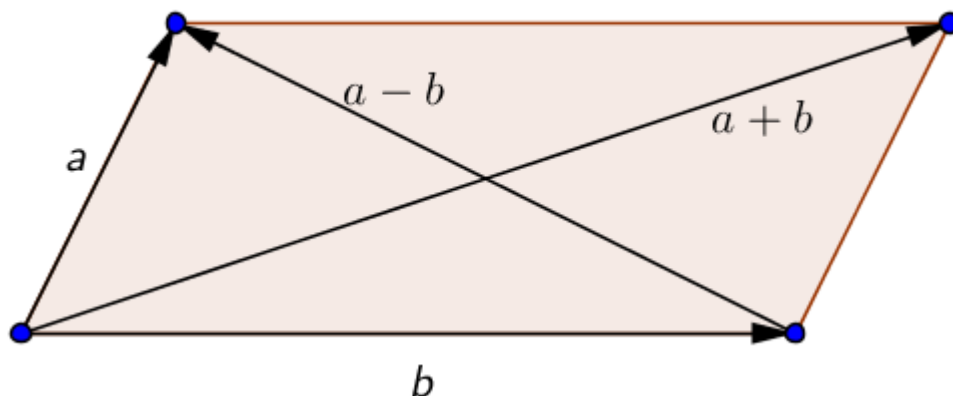
Tapasztalat:

Az átlók négyzetösszege minden esetben állandó.

Miután a gyerekek rájöttek erre, érdemes megkérdezni, hogy szerintük ez az állandó összeg hogyan függ az oldalaktól, esetleg valaki a paralelogramma oldalainak segítségével ki tudja-e fejezni ugyanezt a számot. Ha senki sem jön rá, meg lehet kérni őket, hogy számítsák ki az oldalak négyzetösszegeit. Ha jól dolgoznak, természetesen ugyanarra az eredményre kell jutniuk

Olyan osztályokban, ahol a tanulók már ismerik a vektorok fogalmát, az adott tétel be is bizonyítható.

1. *Bizonyítás:*



13. ábra

Mivel az átlók és oldalak bizonyos összefüggéséről van szó, ezért érdemes lenne egyiket a másik segítségével felírni.

Ha a paralelogramma egy csúcsából kiinduló oldalvektora a és b , az átlóvektorok $a + b$ és

$a - b$.

Az átlók négyzetösszege ezek szerint:

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2 = 2a^2 + 2b^2$$

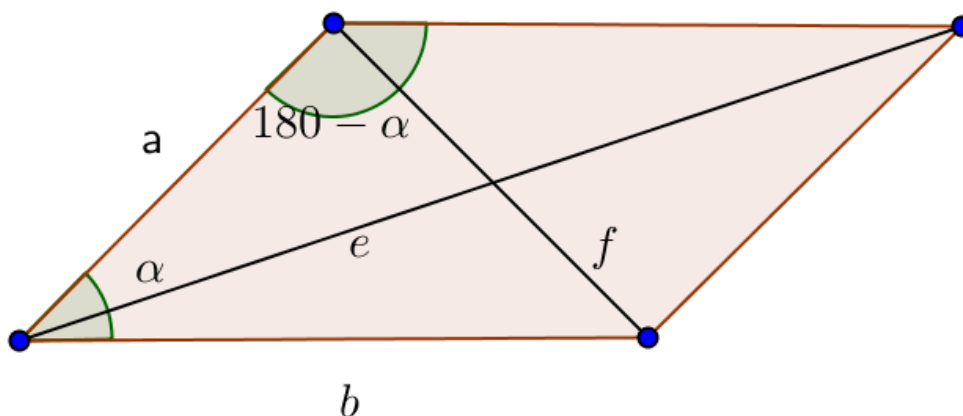
Azaz az átlók négyzetösszege valóban az oldalak négyzetösszegével egyenlő.

■

A következő bizonyításhoz a koszinusztétel ismerete szükséges.

2. Bizonyítás [14]

Abból, hogy a tételben az átlók illetve az oldalak négyzetösszege szerepel, illetve az, hogy köztük valamiféle összefüggést kell felírni, szinte természetes következik a koszinusztétel használata. Érdekes azt is megfontolni, hogy minél kevesebb ismeretlent használjunk: ezt úgy érhetjük el, ha a paralelogramma tulajdonságaiból indulunk ki: két szomszédos szög összege 180° , tehát ha a paralelogramma egyik szöge α , a mellette lévő: $180^\circ - \alpha$. (14. ábra).



14. ábra

A két átlóra alkalmazva a koszinusztételt:

$$f^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$$

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(180 - \alpha) = a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha$$

A két egyenletet összeadva kapjuk a tételünket:

$$e^2 + f^2 = 2a^2 + 2b^2$$

■

IV. Téglalap és négyzet feldarabolása négyzetekre

Ha egy téglalap oldalai összemérhetőek, a téglalap feldarabolható n db $s_1, s_2 \dots, s_n$ egész oldalú négyzetre.

Definíció:

Egy feldarabolt téglalapot vagy négyzetet tökéletesnek nevezünk, ha minden négyzetdarab különböző, amennyiben ez nem teljesül, az említett alakzatok nem tökéletesek.

Definíció:

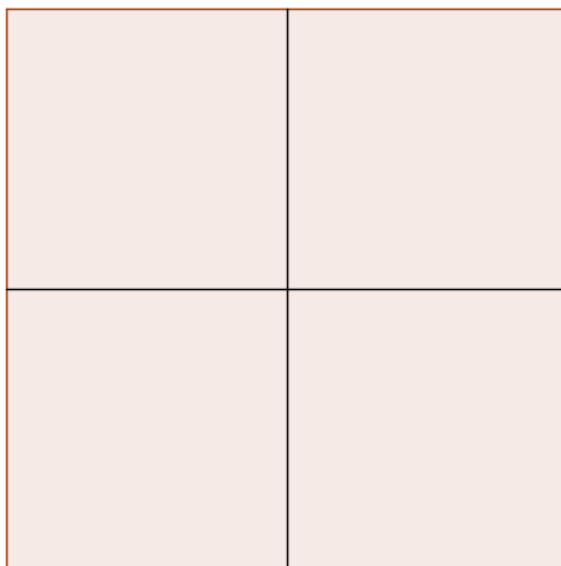
A feldarabolt négyzetek illetve téglalapok egyszerűek, ha nem tartalmaznak kisebb négyzetet vagy téglalapot, ellenkező esetben összetettek.

4.1. Négyzet nem tökéletes darabolása négyzetekre

Feladat célja:

Adott négyzet nem feltétlenül egybevágó négyzetekre történő darabolása során a gyerekek belássák, hogy $n > 5$ esetén minden négyzet feldarabolható pontosan n darab másik négyzetre [15].

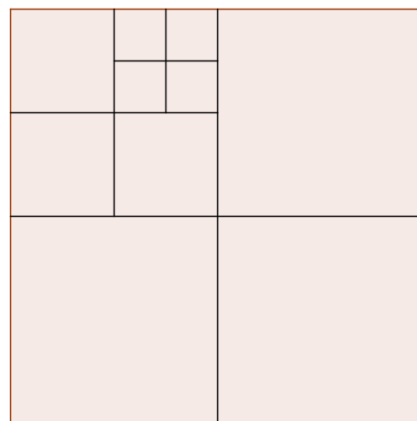
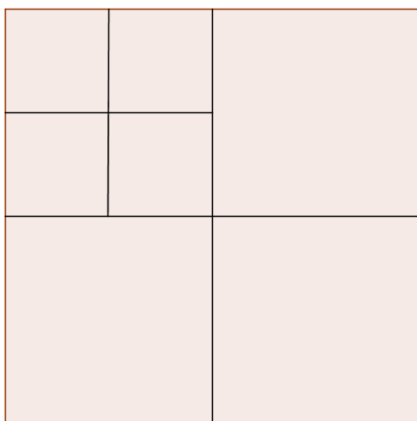
A feladat során rajzoltathatunk a diákokkal egy négyzetet, és megkérjük, hogy osszák fel azt négyzetekre (a négyzetek lehetnek egybevágóak és különbözőek is). Kevés próbálkozás után valószínűsíthető, hogy rájönnek arra, hogy 2 és 3 négyzetre nem darabolható fel, viszont 4 négyzetre egyszerű feldarabolni (15. ábra):



15. ábra

Ha nincs további ötlet a darabolásra, feltehetjük diákjainknak a kérdést, hogy ezzel a negyedelési eljárással hány darabra lehet még felosztani a négyzetet.

A választ a 16. ábra adja meg:



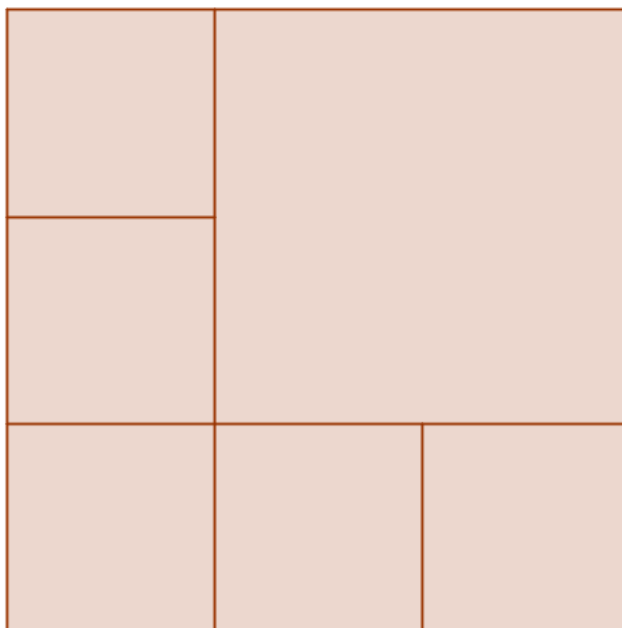
16. ábra

Az ábráról is jól látható, hogy egy-egy négyzetet elnegyedelve mindig 3-mal nő a négyzetek száma, tehát a 4, 7, 10, 13... számtani sorozat minden egyes tagja előállítható a tárgyalt módon.

Ezután feltehető a kérdés, hogy csak ezekre a darabszámokra osztható-e fel a négyzet.

A válasz természetesen az, hogy nem.

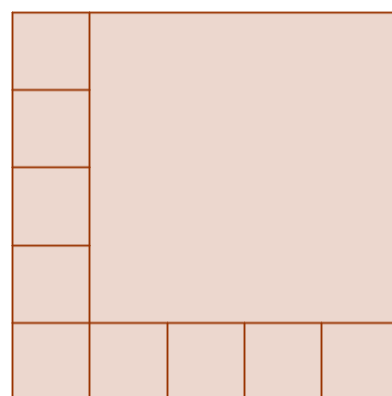
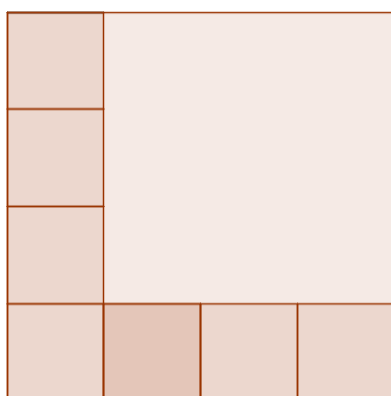
Ennek egyik példáját mutatja be a 17. ábra:



17. ábra

Alkalmazhatjuk-e ezt az eljárást az $n=6$ -on kívül más darabolásra is?

A válasz az, hogy igen, például $n = 8$ -ra és $n = 10$ -re is (18. ábra):



18. ábra

Természetesen felvetődik a kérdés, hogy mindegyik páros n -re alkalmazható-e a fent bemutatott darabolás.

Igen! Hiszen, ha megfigyeljük a 17. ábra és 18. ábra négyzeteit, láthatjuk, hogy minden páros n -re először is a négyzet oldalait feldaraboltuk $k = n/2$ darabra.

Az így kapott négyzetek oldalai nyilvánvalóan $1/k$ -ad részei az eredeti négyzet oldalának.

A bal oldalon és az alul keletkezett egybevágó kisméretű négyzetek száma:

$$2(k-1) + 1 = 2k - 1$$

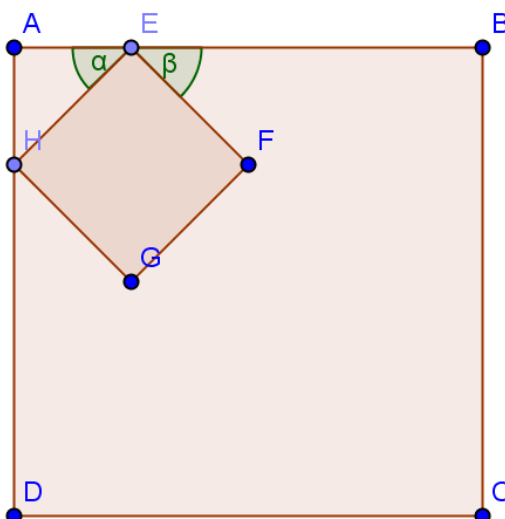
Ez a jobb felső sarokban maradt nagy négyzettel összesen $2k$ db négyzetet alkot.

Összevetve a kétféle darabolás tapasztalatát kapjuk, hogy egyrészt $n \geq 4$ esetén minden páros n -re létezik megfelelő darabolás, illetve hogy a 4, 7, 10, 13... sorozat tagjai is előállíthatók. Ebből fogalmazható meg az állítás, amit a gyerekek saját tapasztalataik alapján mondhatnak ki.

Megjegyzés:

Az $n = 2$ darabolás nyilván nem lehetséges, mivel akkor lenne a négyzetnek olyan oldala, amit nem osztunk fel, de négyzetről lévén szó, ez azt jelentené, hogy a darabolás során kapott négyzet oldala az eredetiével egyezne meg, ami ellentmondás.

Az $n = 3$ -ról való darabolás vázlatosan áttekintve azért nem lehetséges, mert egyrészt az új kis négyzeteknek tengelypárhuzamosoknak kell lenniük az eredetivel. (Különben lenne olyan tartomány, ami nem a 90° többszöröse) (19. ábra). Másrészt pedig, ha ez így van, a négyzet egyik oldala mentén 2, egy másik oldala mentén 1 db négyzet lenne, és ez az 1 az $n = 2$ eset miatti megfontolás miatt lehetetlen.



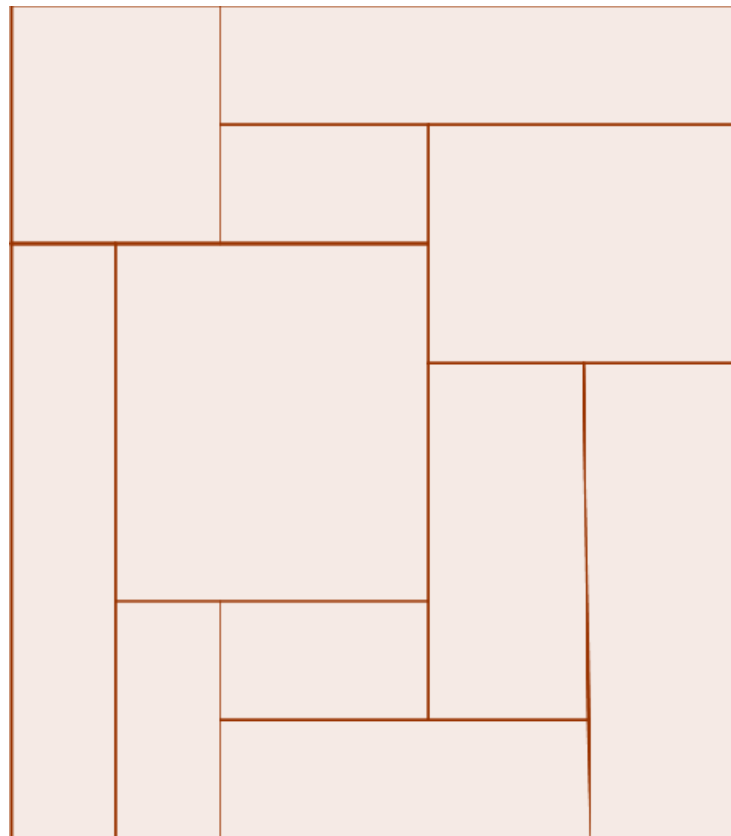
19. ábra

Az $n = 5$ eset megvalósíthatatlansága az $n = 3$ -mal analóg módon bizonyítható.

4.2. Algebrai eszközökkel segített tökéletes darabolás

4.2.1. Téglalap darabolása négyzetekre

Egy téglalap tökéletes darabolása megvalósítható elemi algebrai eszközökkel. [16]
Ehhez először is a következő hálót (20. ábra) használjuk fel:



20. ábra

Feladat:

A 20. ábra egy rosszul megszerkesztett négyzetekre felbontott téglalap hálóját szemlélteti. Mekkoraak legyenek a kis négyzetek oldalai, hogy az adott hálójú téglalap tényleg négyzetekké legyen felbontva?

Megoldás:

Az ábrán látható módon a két középen fekvő négyzet oldalát x -szel és y -nal jelöljük (21. ábra)

Az alsó négyzet oldala így $x + y$ és így tovább az ábrán látható oldalakat kapjuk. Az AB-val jelölt oldalhossz kétféleképpen kifejezve:

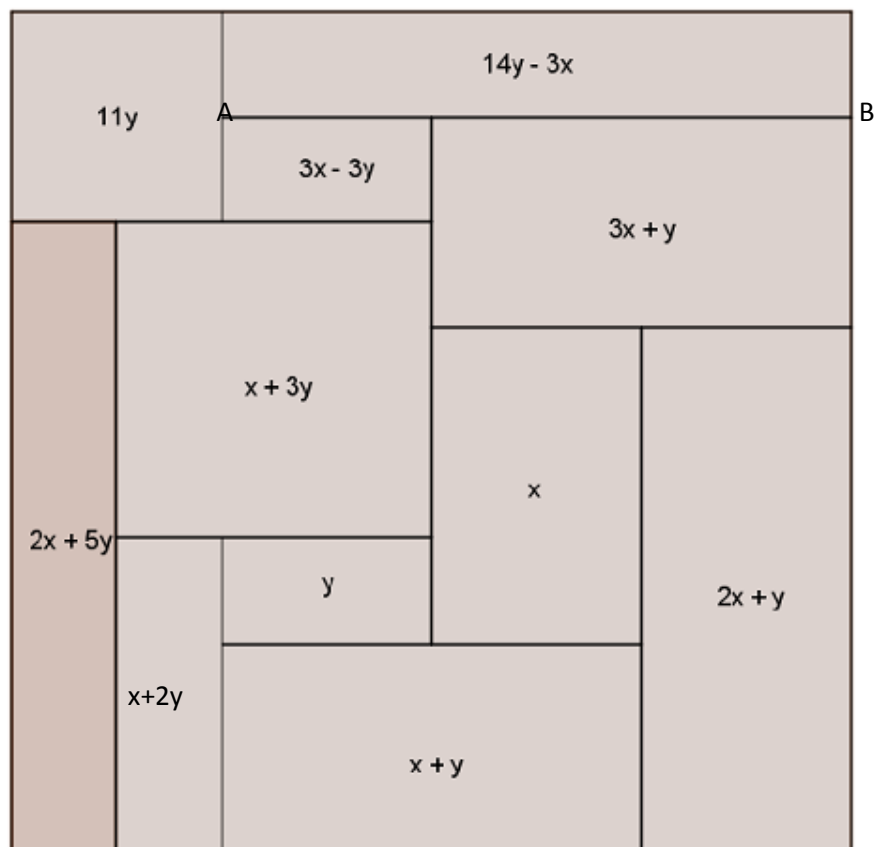
$$(3x - 3y) + (3x + y) = 14y - 3x$$

Amiből:

$$6x - 2y = 14y - 3x$$

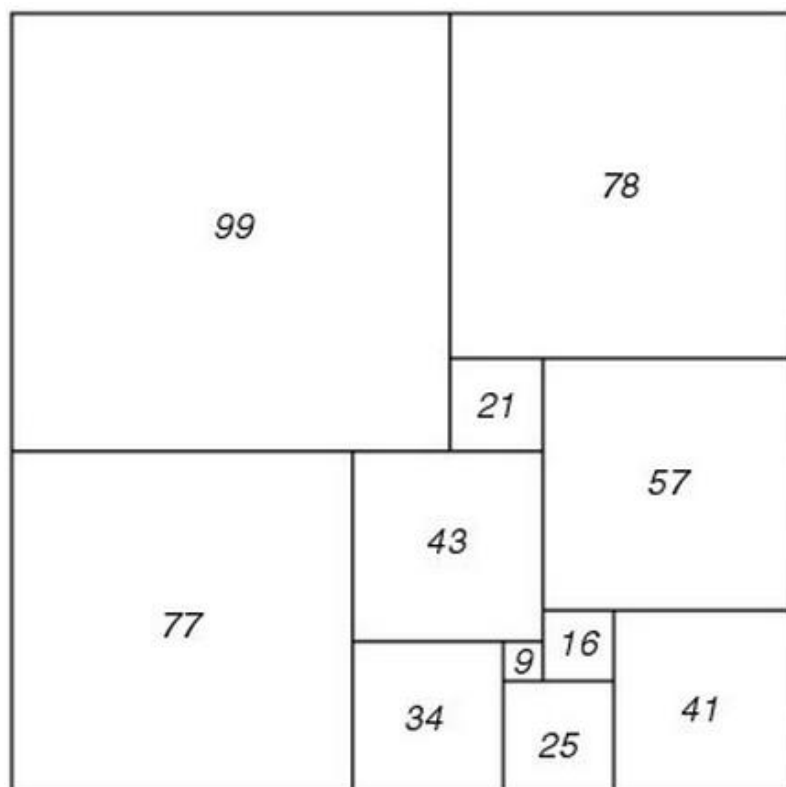
$$9x = 16y$$

Mivel a 9 és 16 relatív prímek, így értelemszerűen az $x = 16$ és $y = 9$ adja a legkisebb jó megoldást, amiből a darabolás során keletkezett összes új négyzet oldalhossza is kiszámítható.



21. ábra

Az összes kiségyzet oldalát a következő ábra szemlélteti (22. ábra):



22. ábra

4.2.2. Négyzet darabolása négyzetekre

A 4.2.1-ben ismertetett problémával analóg problémát érdekesebben és hétköznapi vonatkozásban előadva a következő feladatot is kitűzhetjük:

*Feladat*³:

Képzeld el, hogy bútorkészítő vagyunk, és az egyik megrendelőnk különös kéréssel áll elénk. Azt szeretné, ha egy barátjánál látott négyzet alakú fiókos szekrény pontos mását készítenénk el neki. A négyzet alakú szekrény egyedisége abban rejlik, hogy a fiókjai mind különböző oldalhosszúságú négyzet alakúak. Hogy megkönnyítse dolgunkat, a szekrényt le is fotózta (23. ábra), ám pechére elfelejtette az egyes fiókok méreteit, csak arra emlékszik, hogy maga szekrény 112 x 112 cm-es. Készítsd el a fiókos szekrény tervrajzát!

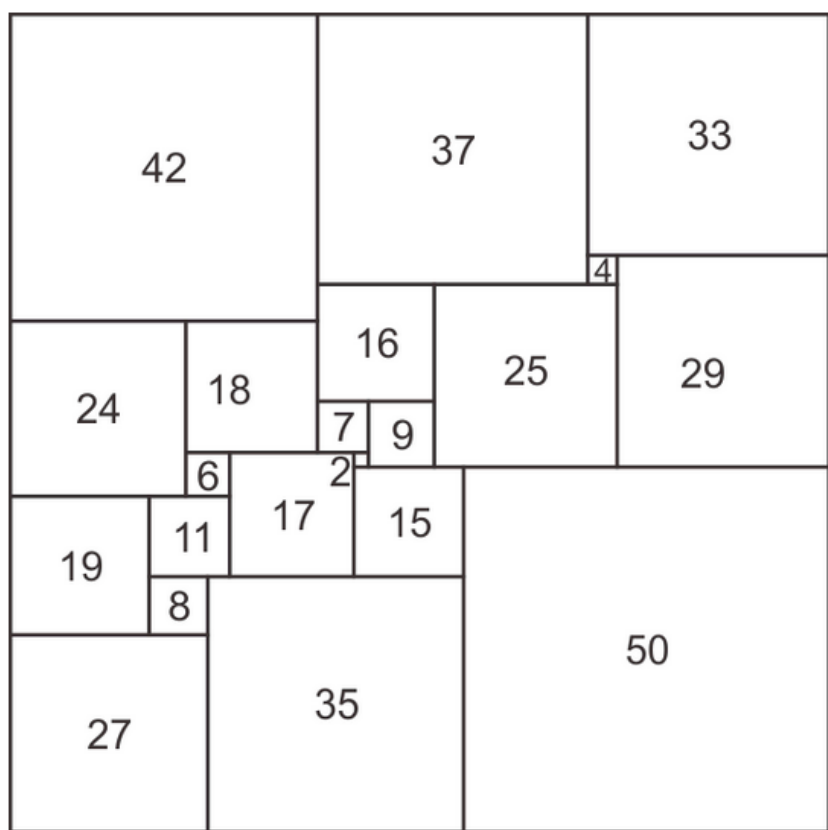
³ A feladat szövegének ötletét a <http://blog.makezine.com/2011/06/13/math-monday-the-squared-square/> adta.



23. ábra⁴

Az előbbivel azonos módszerrel oldva meg a feladatot a következő tervrajzot kapjuk (24. ábra):

⁴ A kép forrása: <http://blog.makezine.com/2011/06/13/math-monday-the-squared-square/>



24. ábra

V. Hogyan oldjunk meg matematikai feladatokat?

Pólya György a feladatmegoldás korábban már ismertetett 4 lépésének konkrét megvalósítását példákon is bemutatja. Az egyik példája a Pitagorasz-tétel tanításával kapcsolatos, egy olyan osztályról van szó, ahol a diákok csak kevés térgeometriai ismerettel rendelkeznek. Egy téglatest testátlójának hosszát kell meghatározni a téglatest élei hosszának ismeretében. Pólya szerint a „jó ötletek csak régi tapasztalatokon és korábban szerzett ismereteken alapulhatnak”, ezért nagy hangsúlyt fektet arra, hogy segítő kérdései nyomán a tanulók visszaemlékezzenek egy már megoldott rokon feladatra, ahol ugyanazt, legalábbis nagyon hasonló ismeretlent kellett meghatározni. A korábbi feladat tapasztalatait hasznosítva indítható el tehát a megfelelő gondolatmenet. [5]

A következőkben Pólya György feladatmegoldó módszerét felhasználva egy saját, egymásra építhető, egyre nehezedő példákat mutatok be. A témakör, akárcsak Pólyánál, itt is a Pitagorasz-tétel.

5.1. Feladat

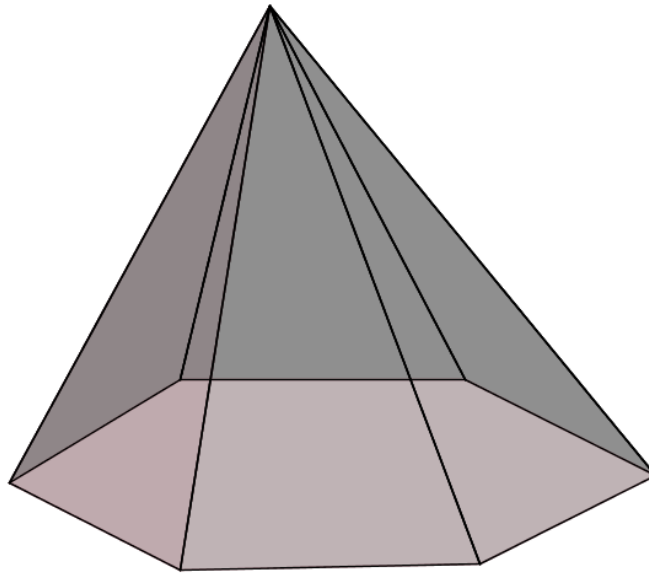
Egy egyenlőszárú háromszög alapja 2 m, szára 3 m. Számítsd ki a háromszög területét!

Megoldás:

- 1) Értsd meg a feladatot!

A diákoknak meg kell értenie a feladatot! De még az sem elég, ha megértik, akarniuk kell megoldani. Ezért érdemes számukra is érdekessé tenni azt. Az érdeklődés felkeltése pedig tapasztalatom szerint gyakran csak abban áll, hogy egy valóságközeli feladatszöveget találunk ki. A diákok gyakran kérdezik meg ugyanis, hogy ezt a tananyagot hol fogják az „életben” használni. Ha látnak egy alkalmazási lehetőséget, mindjárt nagyobb kedvvel látnak hozzá a megoldásához. Az előbbi feladatot például ilyen köntösbe bújtathatjuk:

Osztálykirándulás előtt Zsolt, Peti és Norbi⁵ úgy döntenek, hogy saját maguk készítik el sátrukat 6 db egyenlő szárú háromszög alakú vászonból (25. ábra), melynek alapja 2 m, szára 3 m. Mennyibe fog kerülni a sátoranyag fejenként, ha a vászon négyzetmétere 1000 Ft, a sátor alapja nem vászonból készül és mindenki ugyanannyit fizet?



25. ábra

Hogy leellenőrizzük, megértették-e a diákok a feladat szövegét, feltehetünk néhány kérdést erre vonatkozólag:

- *Miről van szó?*

A diákoknak el kell tudniuk mondani saját szavaikkal a feladatot!

- *Mi van adva?*

- A háromszögek alapja, szára, a vászon négyzetméterének ára, a tanulók száma.

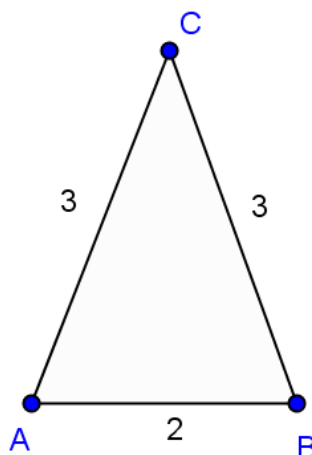
- *Vezessünk be az adatokra alkalmas jelölést!*

- $c = 2 \text{ m}$; $a = b = 3 \text{ m}$; $\text{ár/m}^2 = 1000 \text{ Ft}$; $n = 6$

- *Készíts ábrát!*

⁵ Még inkább figyelemfelkeltő, ha az osztály egyes tanulóiról szól a feladat szövege.

Ha a válaszokból az derül ki, hogy megértették a feladatot, mivel geometriai feladatról van szó, feltétlenül készíttessünk velük ábrát, jelölve rajta az adatokat is. Az ábrakészítésnél valószínű, hogy a diákok nagy része rájön arra, hogy elég, ha csupán egy egyenlőszárú háromszöggel foglalkozik, és annak számolja ki a területét. Ha valaki esetleg hat háromszöget rajzolna le, az sem baj, kedvesen rámutathatunk, hogy hely- és időtakarékoság céljából is kedvezőbb csak egyet ábrázolni. (26. ábra)



26. ábra

2) Készíts tervet!

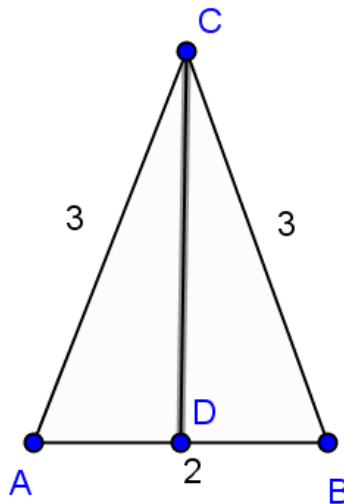
Ha már diákjaink eljutottak oda, hogy az összköltség meghatározásához először a sátorvászon területét kell kiszámítani, mely tulajdonképpen az egyenlőszárú háromszög alakú vászondarab hatszorosa, akkor a problémát leredukálták a 11. ábrán látható háromszög területének kiszámítására. Nyilvánvaló, hogy szinte mindig akad egy-két diák, akinek villámcsapásszerűen beugrik a megoldási menet, a többieket viszont a következőképpen vezethetjük észrevétlenül:

- *Milyen adatok szükségesek ahhoz, hogy kiszámítsuk a háromszög területét?*

- Szükség van a háromszög alapjának és a hozzá tartozó magasságnak az ismeretére.⁶

⁶ A háromszög területe a Héron-képlet alapján az oldalhosszak ismeretében is kiszámítható. A Héron-képlet viszont az egységes érettségi követelmények szerint csak emelt szinten kötelező tananyag.
www.ofi.hu/tudastar/erettsegi/matematika-kov

- *Mi az, ami ismeretlen?*
- A háromszög magassága.
- *Hogy tudnád kiszámítani a háromszög magasságát?*
- Nem tudom.
- *Nem jut eszedbe olyan feladat, amiben hasonló ismeretlen szerepelt?*
- ...
- *A háromszög magassága egy szakasz. Nem találkoztunk már olyan feladattal, mikor egy szakasz hosszát kellett meghatározni?*
- De. Pitagorasz-tételénél.
- *Úgy van. Pitagorasz-tételét milyen alakzatokra tudjuk alkalmazni?*
- Derékszögű háromszögekre.
- *A mi háromszögünk azonban nem derékszögű. ⁷Hogyan találhatnánk mégis derékszögű háromszöget az ábrán?*
- Az egyik magasság behúzásával. (27. ábra)



27. ábra

Az egyenlőszárú háromszög tulajdonságainak ismeretében tudja, hogy AD szakasz az AB szakasz hosszának fele. Az egyik derékszögű háromszögben a

⁷ Lehet, hogy egyesekben felmerül a kétely, vajon eleve nem derékszögű-e az adott háromszög. Ez esetben egyszerűen ellenőriztessük le a Pitagorasz-tételt. Sőt, az aktuális adatok mellett tulajdonképpen erre sincs szükség, hiszen a két egyenlő hosszúságú oldal csak a két befogó lehetne, derékszögű háromszög esetén viszont az átfogónak ezeknél hosszabbnak kell lennie (hiszen a háromszög legnagyobb szögével szemben fekvő oldal). A mi háromszögünk ennek nem tesz eleget, azaz nem derékszögű.

Pitagorasz-tételt alkalmazva kapja meg a magasságot, s ennek felhasználásával pedig a területet.

3) Hajtsd végre a tervet!

$$CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{8} \text{ m} (\approx 2,8 \text{ m})$$

Amiből egy egyszerű számítással kapja, hogy a háromszög területe:

$$T = \frac{AB \cdot CD}{2} \approx 2,8 \text{ m}^2$$

A 6 egybevágó háromszögből álló sátor területe:

$$T = 6 \cdot 2,8 \text{ m}^2 = 16,8 \text{ m}^2$$

$$\text{Az összköltség: } 16,8 \text{ m}^2 \cdot 1000 \frac{\text{Ft}}{\text{m}^2} = 16800 \text{ Ft.}$$

Egy embernek tehát: $16800 \text{ Ft} \div 3 = 5600 \text{ Ft}$ – ot kell fizetnie.

Mellékvágányra vihet egy diákot az, ha a területképletbe az egyik szarat és az ahhoz tartozó magasságot próbálja meg behelyettesíteni. Ekkor további segítő kérdések szükségesek ahhoz, hogy rávezessük a tanulót, sokkal célravezetőbb, ha az alapot és a hozzá tartozó magasságot választja, hiszen az alapról tudjuk, hogy a magasság talppontja felezi.

4) Vizsgáld meg a megoldást!

A megoldás vizsgálatának nagy haszna van. Bár az előbb bemutatott példa nagyon egyszerű, a diákok egy része viszont, mikor először találkozik egy ilyen feladattal, mégsem jön rá egyedül a megoldásra. Ezért érdemes az ebből leszűrt tapasztalatokat átnézni, hogy később is hasznosítani tudja.

Két legyet ütünk egy csapásra, ha az adott feladat általánosítását kérjük: egyrészt ahhoz, hogy általánosítani tudjon valaki, újra át kell nézni a feladatot, másrészt pedig a konkrét számok büvköréből elmozdíthatjuk az absztrakció felé.

- Ha egy egyenlőszárú háromszög alapja c , szárai pedig b hosszúságúak, hogyan számolnád ki a területét?

- Mi volt az előbbi feladat megoldásának első lépése?

- Pitagorasz tételéből kiszámoltuk az alaphoz tartozó magasságot.

- *Tedd most is ugyanezt az előző számításod analógiájára!*

$$- m = \sqrt{b^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2} = \sqrt{b^2 - \frac{c^2}{4}}$$

- *Most pedig helyettesítsd be a területképletbe a magasságot!*

$$- T = \frac{c \cdot \sqrt{b^2 - \frac{c^2}{4}}}{2}$$

Nyilván nem az a lényeg, hogy a fent levezetett „képletet” kívülről megtanulják a diákok, hanem az, hogy ilyeneket saját maguk tudjanak levezetni. Mivel informatikai szakközépiskolában tanítok, diákjaimat nagyon érdekli a programozás. Egy-egy ilyen általánosítás után gyakran hangsúlyozom, hogy most tulajdonképpen programoztak, hiszen a „program” bármely egyenlőszárú háromszög alap- és szárhosszának ismeretében ki tudja számolni annak területét.

Az egyenlőszárú háromszög alapját szándékosan jelöltem b -vel, alapját pedig c -vel, hiszen így a magasság kiszámításakor a b négyzetéből kellett kivonni a c felének négyzetét. Sajnálatos tapasztalatom ugyanis, hogy egyes diákokban annyira rögzül az $a^2 + b^2 = c^2$, hogy ha netalán a b négyzetéből kell kivonni a c négyzetét, megijednek, és azt hiszik, valamit rosszul csináltak. Meg kell értetnünk hát velük, hogy a Pitagorasz-tétel fent említett matematikai jelekkel történő megfogalmazása csak akkor helytálló, ha a , b a két befogó, c pedig az átfogó jele, de az csakis és kizárólag tőlünk függ, hogy mit mivel jelölünk.

A feladat megoldása után érdemes rámutatni a feladat tapasztalatainak egyéb alkalmazási lehetőségeire. Például:

- *Az előző tapasztalatok felhasználásával ki tudnád számítani egy egyenlő oldalú háromszög területét is?*

- Mivel az egyenlő oldalú háromszög egyben egyenlőszárú is, alkalmazhatjuk az előbb levezetett területképletet, ráadásul itt már minden oldal egyenlő, tehát:

$$m = \sqrt{b^2 - \frac{b^2}{4}} = \sqrt{\frac{3b^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}b$$

$$T = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}b \cdot b}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}b^2$$

5.2. Feladat

Adott a derékszögű trapéz két alapja és a derékszög melletti szára. Mekkora a trapéz kerülete?

A motiváció érdekében ismét egy érdekesebb szöveggel próbálkozunk.

Egy Google Térkép műholdfelvételéről derült ki, hogy a gyönyűi focipálya egyik oldalvonala 107 m helyett 109 m hosszú (28. ábra). A pályát azonnal átépítették, mérete jelenleg szabványos: 107 x 68m. Számítsd ki, hány méterrel kell kevesebbet futnia az átépítés után annak a focistának, aki mindig a festett vonalakon haladva futja körbe a pályát?⁸



28. ábra⁹

- 1) Értsd meg a feladatot!

⁸ A feladat ötletét a következő cikkből merítettem:

<http://www.nemzetisport.hu/sportszelep/evtizedekig-volt-trapez-alaku-a-gonyui-focipalya-kep-video-2199531>

⁹ A kép forrása:

<https://maps.google.hu/?ie=UTF8&ll=47.734824,17.829636&spn=0.002082,0.005284&t=h&z=18&source=embed>

A diákoknak el kell mondaniuk a feladatot saját szavaikkal. Illetve matematikailag is meg kell tudniuk fogalmazni a problémát. Vagyis hogy a focipálya kezdetben derékszögű trapéz alakú volt, melynek kisebbik alapja 107 m, nagyobbik 109 m hosszú volt. A derékszög melletti szára 68 m, a másikat nem ismerjük. Ezt a pályát építették át téglalap alakúvá.

2) Készíts tervet!

Amennyiben tanulóinknak fogalmuk sincs, hogyan lássanak hozzá a feladathoz, szükség lehet néhány segítő kérdésekre is. Ezek lehetnek például a következők:

- *Mit kérdez a feladat?*

- Azt, hogy hány méterrel kevesebbet fut a focista átépítés után, mint előtte?

- *Hogyan tudjuk meg, hány métert fut átépítés után?*

- ?

- *Tudjuk az átépítés utáni pálya méreteit. Tegyük fel, csak a 107 m hosszú oldalon mentén fut végig? Hány métert fut ekkor?*

- 107 métert.

- *Mondjuk, kevesli ezt a futást, és végigfut a rövidebb oldal mentén is. Hány métert fut ekkor?*

- 175 métert.

- *És ha körbefutja a pályát?*

- Akkor össze kell adni a téglalap alakú pálya összes oldalhosszát, vagyis ki kell számítani a pálya területét.

- *És hogyan tudjuk meg, hogy mennyivel futott többet, mint az átépítés előtt?*

- Kiszámítjuk az előző pálya, azaz a derékszögű trapéz területét, és a kettő különbsége lesz az eredmény!

A megoldási terv egy része kész van, a problémát nyilván az okozza, hogy nem ismert a trapéz egyik szára. Ekkor készíttessünk a diákokkal ábrát, majd az előző feladatnál leírt módon vezessük rá észrevétlenül ismét őket a trapéz hosszabbik száraának kiszámítására. Ez történhet a következőképpen:

- A feladatot ismét leszűkítettük arra a problémára, hogy ki kell számítani a trapéz egyik szárát, ami egy szakasz. Nem találoztunk már olyan problémával, amikor egy szakasz volt az ismeretlen?

- De, például a sátoros feladatnál. Ott ki kellett számolni a háromszögek magasságát ahhoz, hogy aztán meghatározzuk a területüket.

- Nem tudnád az ottani eljárást valahogy itt is alkalmazni?

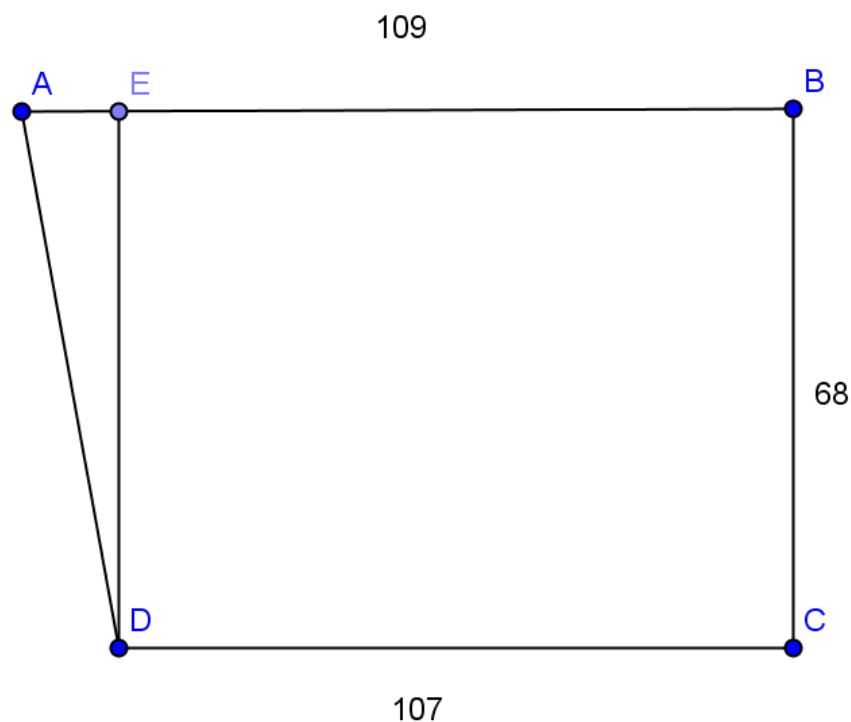
- Ott Pitagorasz tételét használtuk. De itt nemhogy derékszögű háromszög nincsen, de még háromszög se.

- De nem tudnál esetleg mégis egy olyan derékszögű háromszöget találni, aminek köze van a trapéz szárához?

- Ha behúzom a magasságot, kapok egy ilyen háromszöget.

A fenti párbeszéd egy képzeletbeli példa csupán. Nem biztos, hogy minden diákot ilyen hosszasan kell vezetni, míg eljut a jó gondolathoz, de akár az is előfordulhat, hogy a feltett kérdések ellenére sem világos, hogy mi a teendő. Ilyenkor türelmesen, egyre direktebb kérdezéssel lehet továbbvinni az úton tanítványainkat. A lényeg azonban, hogy meghagyjuk a felfedezés örömét, hagyjuk, hogy ő jöjjön rá, hogyan is kell megoldani a problémát. Hagyjunk megfelelő mennyiségű időt a gondolkodásra és a szárnybontogatásra. Ezért nagyon fontos a differenciált oktatás: mindenki a saját, egyéni tempójában nyújtsa a tőle telhető maximumot. A matematikával való foglalkozás öröme legyen független az egyéni képességektől: rendelkezzen az illető a lehető legjobb matematikai affinitással vagy csak szerényekkel – mindegy! Lelje örömét a matekban mindenki!

A végleges megoldási terv elkészülése után jöhet az adatokat és a szükséges segédvonalat tartalmazó rajz (29. ábra):



29. ábra

3) Hajtsd végre a tervet!

A szemlélet nyilván azt sugallja, hogy a $DE = BC$, $DC = BE$. Diákjainkat azonban hozzá kell szoktatni ahhoz, hogy egyrészt a szemlélet megtévesztő lehet, másrészt pedig ha igazuk is van, be kell bizonyítaniuk. Néhány rávezető kérdéssel vezethetjük el őket erre az igazolásra.

- *Hogyan tudnád igazolni, hogy $BE = CD$ és $ED = BC$?*
- ?
- *Mely alakzatnak része az említett négy szakasz?*
- Az EBCD téglalapnak.
- *Biztos vagy benne, hogy egy téglalapról van szó?*
- Igen.
- *Mitől téglalap az EBCD négyszög?*
- Két-két szemközti oldala párhuzamos, és minden szöge derékszög.
- *Helyes. És miért következik ebből, hogy az említett szakaszok egyenlősége?*
- Mert a téglalap szemközti oldalai egyenlők.

Az AED derékszögű háromszögre alkalmazva a Pitagorasz-tételt kapjuk, hogy:

$$AD = \sqrt{AE^2 + ED^2} = \sqrt{4628} \approx 68,03 \text{ (m)}$$

Az ABCD trapéz kerülete:

$$K_{ABCD} = AB + BC + CD + DA = 109 + 68 + 107 + 68,03 = 352,03 \text{ (m)}$$

A pálya átépítése után a pálya téglalap alakú lett (a 29. ábra jelölésével élve: EBCD téglalap). Ennek kerülete:

$$K_{EBCD} = 2 \cdot (107 + 68) = 350 \text{ (m)}$$

Azt, hogy mennyivel kell kevesebbet futnia a focistának, a két terület különbsége adja:

$$K_{ABCD} - K_{EBCD} = 352,03 - 350 = 2,03 \text{ (m)}$$

4) Ellenőrizd a megoldást!

A feladatot és annak megoldási menetét újra átnéztetjük a tanulókkal. Esetleg általánosíttatni is lehet oly módon, hogy ha adott egy derékszögű trapéz két alapja és magassága, ki tudjuk számítani a trapéz ismeretlen oldalát (ebből pedig területét, ha szükséges). Legyen:

a és b a két alap (ahol $a > b$)

m – a trapéz magassága

x – a trapéz ismeretlen szára

Ekkor a trapéz egyik szára megegyezik a magassággal, másik pedig kifejezhető a következőképpen:

$$x = \sqrt{(a - b)^2 + m^2}$$

5.3. Feladat

Egy egyenlő oldalélű csonkagúla alapja négyzet. Adott az alaplaj és a fedőlap éle, illetve a magassága. Mekkora mekkora a felszíne?

A feladat szövege lehet a következő:

Feladat

A világ csupán a II. világháború során szembesült azzal a ténnyel, hogy Kína legalább annyira híres lehetne piramisairól, mint Egyiptom. Egy amerikai pilóta Xian városa fölött repülve pillantotta meg ugyanis az azóta Nagy fehér piramisnak nevezett építményt, melyről azon nyomban fotókat is készített (30. ábra)



30. ábra¹⁰

A kínai kormány ismeretlen okok miatt 2050-ig megtiltotta a nagy fehér piramis és a térség kisebb piramisainak régészeti feltárását¹¹

Hány m² üveglapra lenne szükség, ha el szeretnénk készíteni az egyenlő oldalélű csonka gúla alakú Nagy Fehér Piramis pontos üvegmását, ha tudjuk, hogy az építmény alapja 222 x 217 m, fedőlapja 55 x 54,25 m, magassága pedig 46 m és az alaplapja nem üvegből készülne?

Megjegyzés: Attól függően, hogy milyen korosztálynak szánjuk a feladatunkat, szükség lehet egy kis elméleti bevezetőre. A feladat megoldása ugyanis nem igényel több ismeretet, mint a téglalap és trapéz területének kiszámítása és a Pitagorasz-tétel, tehát például általános iskola 7-8. osztályában is megoldható a feladat, ám az általános

¹⁰ A kép forrása: <http://ancientx.com/nm/anmviewer.asp?a=84>

¹¹ A feladat szövegének ötletét a következő forrásból merítettem:
http://hu.wikipedia.org/wiki/K%C3%ADnai_piramisok

iskolai matematikai kerettantervben nem szerepel a csonka gúla¹², tehát ha az említett osztályok mellett döntünk, tisztáznunk kell az oldalél, az alap- és fedőlap, a felszín, az egyenlő oldalélű csonka gúla stb. fogalmát. Demonstrációs eszközként egy téglalap alakú csonka gúlát is bevihetünk.

Megoldás:

A feladat szövegének megértése után jöhet a lényeges rész, a megoldási terv készítése.

2) Megoldási terv

Néhány segítő kérdés a megoldáshoz:

- *Mit kérdez a feladat?*

- Hogy hány négyzetméter üveglapra van szükség a piramis elkészítéséhez?

- *Hogy tudnád ezt kiszámítani?*

- Ki kell számolni a csonka gúla oldallapjainak és fedőlapjának területét, majd ezek összegét kell venni.

- *Ki tudod-e hát ezeket a területeket számítani?*

- A fedőlapét igen, mert megvan a téglalap mindkét oldala. Az oldallapokét nem, mert az egy olyan trapéz, aminek nem tudom a magasságát.

- *Hogyan tudnád ennek a trapéznak a magasságát kiszámítani?*

- ??

- *Nem csináltunk már korábban olyan feladatot, amikor ugyanez volt az ismeretlen?*

- ?

- *És olyan feladattal foglalkoztunk-e már, mikor egy trapéz bizonyos adatai ismertek voltak, és ebből kellett kiszámolni más adatokat?*

- ?

- *Emlékszel a gyűnői focipálya esetére?*

- Igen, de az egy derékszögű trapéz volt, a mi esetünkben pedig egy egyenlőszárú trapéz van.

¹² Az aktuális matematikai kerettanterv: http://kerettanterv.ofi.hu/2_melleklet_5-8/2.2.03_matemat_5-8.doc

- *Nem tudnál mégis egy derékszögű trapézt találni a csonka gúlában?*

- De, például ha behúzom az egyenlő szárú trapéz alakú oldallap valamelyik magasságát. Sőt, két magasságát, mert akkor két derékszögű háromszöget kapok. Így felosztom a trapézt egy téglalapra és két derékszögű háromszögre. Ha kivonom a nagyobbik alpból a kisebbiket és elosztom kettővel, meglesz az egyik befogó, az oldallap magassága lesz a másik befogó, az oldalél pedig az átfogó. És Pitagorasz-tételéből ki tudom számítani az oldallap magasságát. De nem, mégsem jó, mert a csonka gúla oldalélét sem ismerem.

- *Felhasználtál minden adatot?*

- Hát, a csonka gúla magasságát még nem.

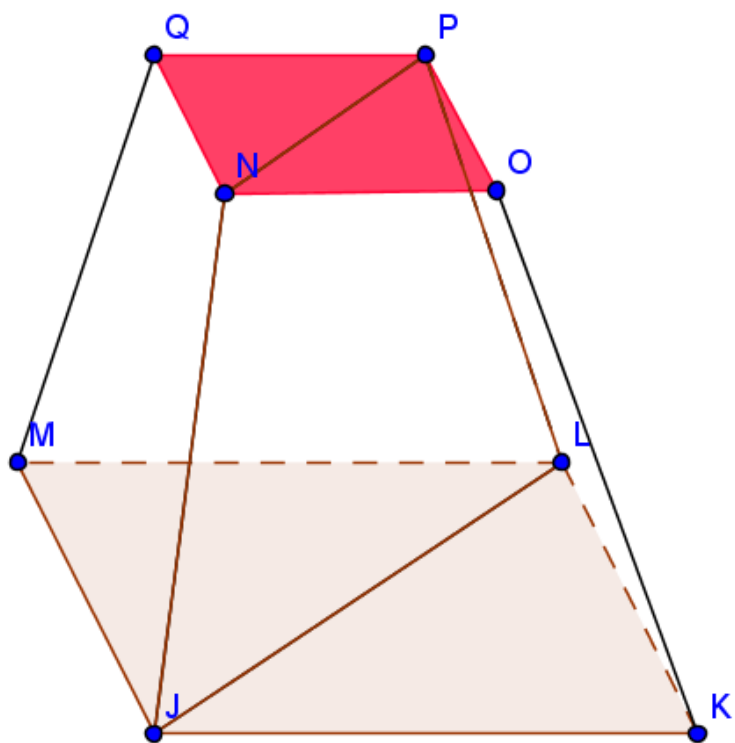
- *Próbálj meg egy olyan alakzatot találni tehát, aminek köze van a gúla magasságához és az oldalélekhez.*

- Megvan! Egy olyan egyenlőszárú trapéz, melynek egyik alapja az alaplap átlója, másik alapja a fedőlap átlója, magassága a gúla magassága, szára pedig a csonka gúla oldaléle. Itt is a Pitagorasz-tétellel ki tudom számolni a szárat, ami a gúla oldaléle.

- *Kész a megoldási terved! Készíts ábrát, majd oldd meg a feladatot!*

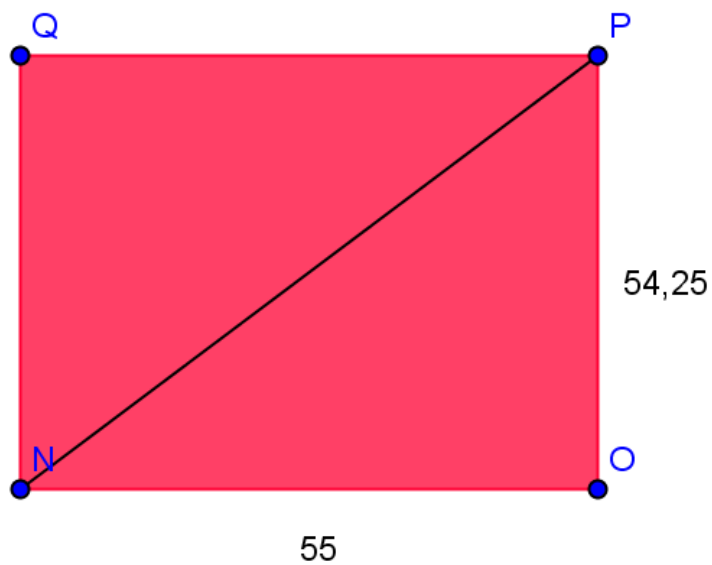
3) Hajtsd végre a tervet!

A térgeometriai feladatok megoldásánál nagyon fontos a helyes ábra használata. Diákjainkat buzdíthatjuk arra, hogy azt az alakzatot, amelyben épp dolgoznak, külön színnel emeljék ki (31. ábra)



31. ábra

Még jobb, ha külön ki is rajzolják (32. ábra)



32. ábra

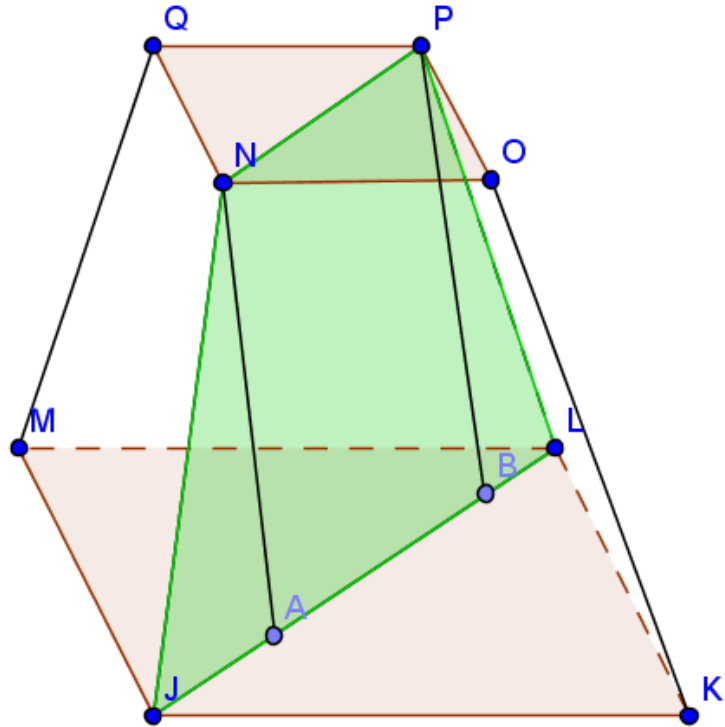
A Pitagorasz-tételt felhasználva kapjuk:

$$PN = \sqrt{NO^2 + OP^2} = \sqrt{55^2 + 54,25^2} \approx 77,25 \text{ (m)}$$

Hasonlóan az MLKJ téglalap átlójának hossza is kiszámítható:

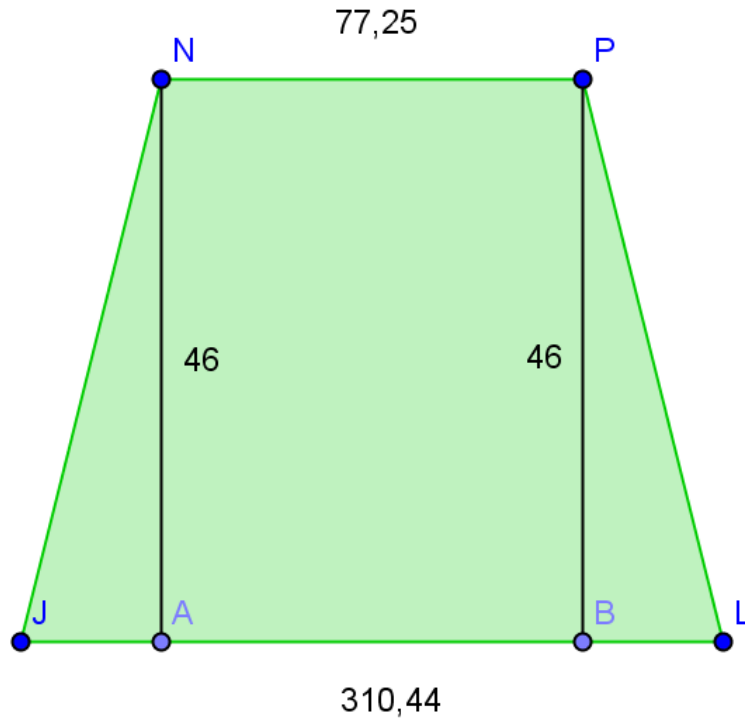
$$LJ = \sqrt{LK^2 + KJ^2} = \sqrt{222^2 + 217^2} \approx 310,44 \text{ (m)}$$

Ahhoz, hogy meghatározzuk a csonka gúla oldalélének hosszát, az NPLJ egyenlőszárú trapézban kell tovább dolgoznunk (33. ábra):



33. ábra

A megfelelő síkmetszetet kirajzolva (34. ábra):



34. ábra

A 34. ábra jelöléseit használva:

NPBA négyszög téglalap (szemben fekvő oldalai párhuzamosak, szögei 90° -osak), tehát

$$AB = NP = 77,25 \text{ m.}$$

Mivel NPLJ négyszög szimmetrikus trapéz:

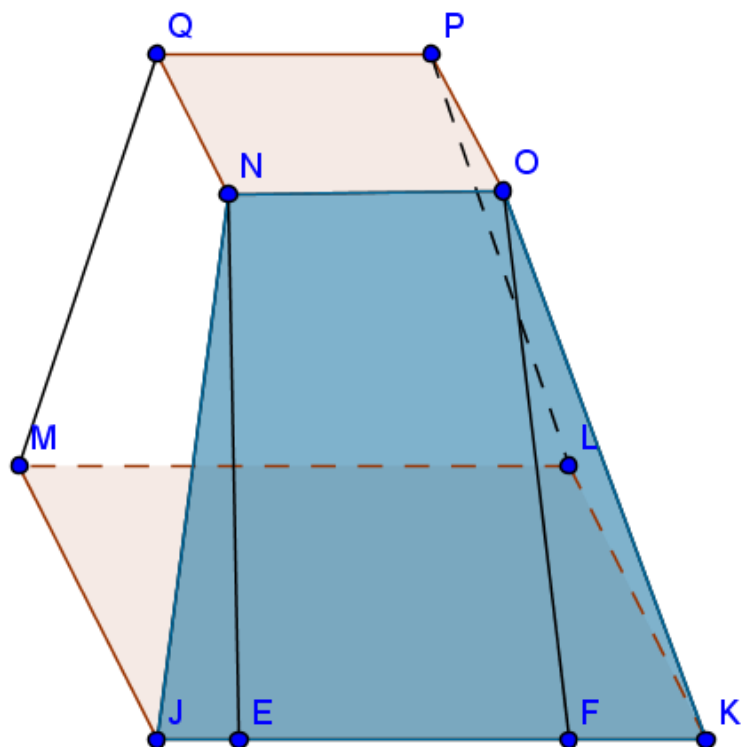
$$JA = BL = \frac{JL - AB}{2} = \frac{310,44 - 77,25}{2} = 116,595 \text{ (m)}$$

NAJ derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel alapján:

$$NJ = \sqrt{NA^2 + AJ^2} = \sqrt{46^2 + 116,595^2} \approx 125,34 \text{ (m)}$$

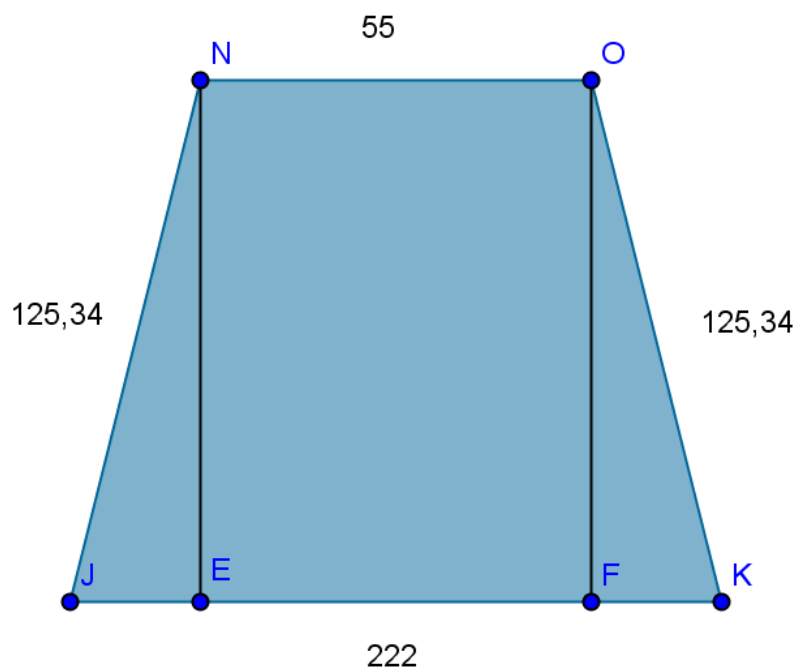
Mivel a csonka gúla minden oldaléle egyenlő, ezért

$$NJ = OK = PM = QM = 125,34 \text{ m.}$$



35. ábra

Az NOKJ egyenlőszárú trapézt külön kirajzolva:



36. ábra

$$JE = \frac{JK - NO}{2} = 83,5 \text{ (m)}$$

Az NEJ derékszögű háromszögben pedig a Pitagorasz-tétel alapján:

$$NE = \sqrt{NJ^2 - JE^2} \approx 93,48 \text{ (m)}$$

Most már kiszámítható NOKJ és QPLM egyenlőszárú trapézok területe (a két trapéz a megfelelő oldalak egybevágósága miatt egybevágó)

$$T_{QPLM} = T_{NOKJ} = \frac{JK+NO}{2} \cdot NE = 12946,98 \text{ (m}^2\text{)}$$

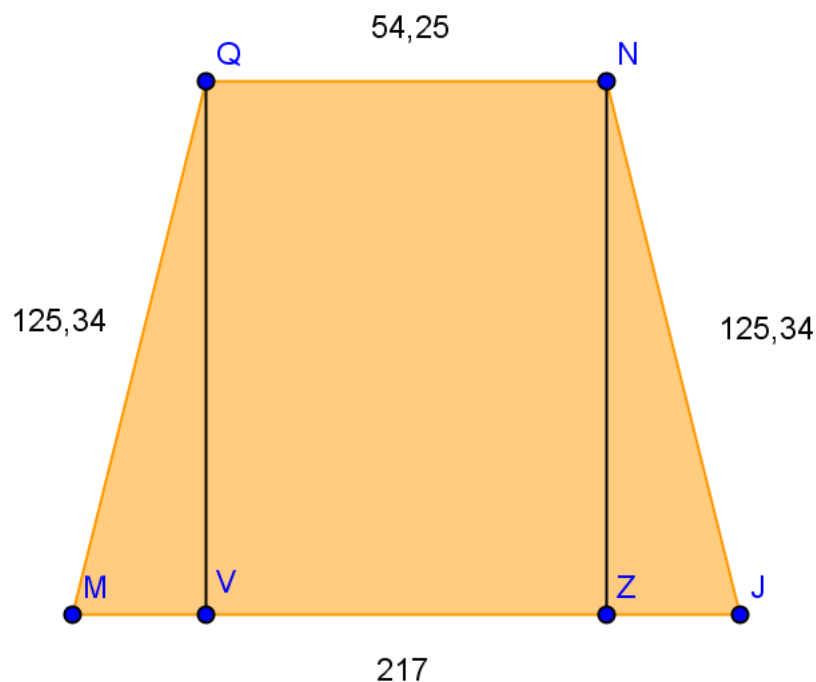
A másik két egybevágó oldallap magasságát kiszámítva megkapjuk azok területét is. Például a QNJM trapézban (37. ábra):

$$MV = \frac{217 - 54,25}{2} = 81,375 \text{ (m)}$$

QVM derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel alapján:

$$QV = \sqrt{QM^2 - MV^2} \approx 95,33 \text{ (m)}$$

$$T_{POKL} = T_{QNMJ} = \frac{QN + MJ}{2} \cdot QV \approx 12929,13 \text{ (m}^2\text{)}$$



37. ábra

Az oldallapok összterülete tehát:

$$T_o = 2 \cdot 12929,13 + 2 \cdot 12946,98 = 51752,22 \text{ (m}^2\text{)}$$

A fedőlap egy téglalap, így területe:

$$T_f = 55 \cdot 54,25 = 2983,75 \text{ (m}^2\text{)}$$

A szükséges üveglapmennyiség pedig:

$$T = T_o + T_f = 54735,97 \text{ (m}^2\text{)}$$

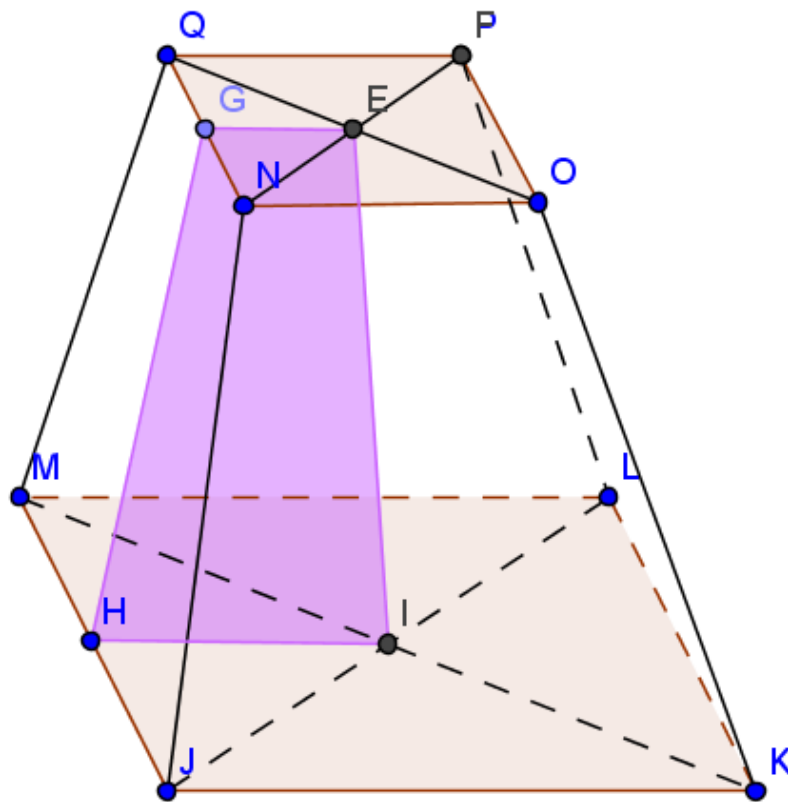
4) Ellenőrizd a megoldást!

A megoldás ellenőriztetésekor ne mulasszuk el a megoldáskor kapott eredmény összehasonlítását. Tippetelhetnek, hogy melyik európai állam területével egyezik meg ez a szám. A helyes válasz Vatikán, aminek a területe $0,44 \text{ km}^2$, tehát kisebb, mint a Nagy Fehér Piramis élethű modelljéhez szükséges üveglapok területe. Ha az alaplapot is üvegből készítenénk:

$$T_a = 222 \cdot 217 = 48174 \text{ (m}^2\text{)}$$

Ez már önmagában Vatikánnál nagyobb területű üveglapot igényelne.

A megoldás áttekintése után nem árt, ha egy másik megoldási lehetőségre is rávezetjük diákjainkat. Ez lehet például a következő (38. ábra):

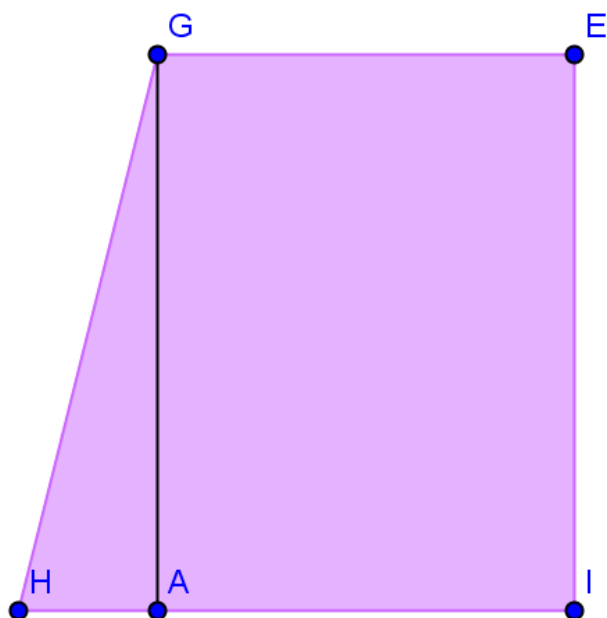


38. ábra

A GEIH derékszögű trapézban a G csúsból is meghúzhatjuk a magasságot (39. ábra). A derékszögű trapéz két alapjának különbsége adja a HA szakasz hosszát, a HAG derékszögű háromszögből pedig kiszámítható a Pitagorasz-tétel segítségével a GH szakasz, ami a QNJM oldallap magassága lesz.

Mivel POKL trapéz egybevágó QNJM trapézzal, ezért magasságuk hossza is megegyezik.

A HI és GE szakaszok pedig párhuzamosak ML és QP szakaszokkal, illetve áthaladnak az alap- illetve fedőlap átlóinak metszéspontján, vagyis középvonalak JML és NQP derékszögű háromszögekben, azaz ML és QP oldalak felével egyenlők (38. ábra).



39. ábra

Hasonlóan számítható ki az NOKJ és QPLM oldallapok magassága is.

VI. A hibák szerepe a matematikaoktatásban

Az okos ember más kárán tanul, a bolond a magáén sem – tartja a mondás, s bármily meglepő, nincs ez másként a matematika oktatásában sem. A felfedeztető matematikaoktatás művelői hatalmas jelentőséget tulajdonítanak a hibáknak, s azok kezelésének. Furdek Attila több cikket is publikált a témában [17], [18], [19]. Óráin rendszeresen alkalmazza a hibakereső módszert, melynek lényegét a diákok mások hibájából való tanulásában látja. Gyakran szándékosan kreál hibákat, máskor a diákok egy-egy hibás megoldását íratja föl a táblára, az sem ritka eset, hogy két, látszólag helyesnek tűnő megoldást mutat, melyek más-más eredményre vezetnek. Célját mindhárom esetben eléri – egyrészt a diákoknak folyamatosan képen kell lenniük ahhoz, hogy felfedezzék a hibákat, másrészt pedig a nyílt ellentmondások feszegetése aktivizáló hatású – ez pszichológiai tény, harmadsorban pedig, ami talán a legfontosabb, egy önerőből felfedezett hiba emlékezetes marad – az ember ezt nem felejtí el egykönnyen.

Egy egyszerű példát alapul véve szemléltetem a fent leírtakat [17]:

Oldjuk meg a

$$\sqrt{x^2 - 6x + 9} = 1 - 3x$$

egyenletet.

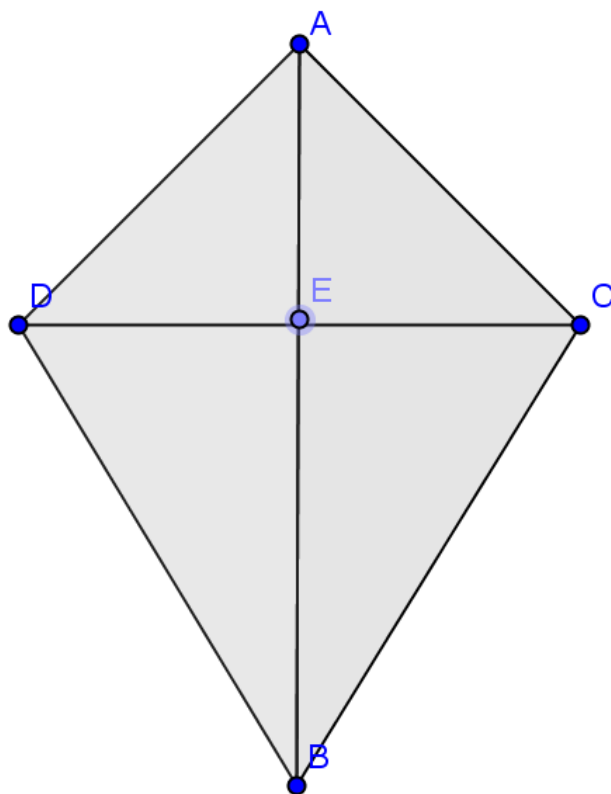
<i>Egy tanuló megoldása</i>	<i>A tanár megoldása</i>
Mindkét oldalt négyzetre emeljük.	Felismerjük egy kéttagú kifejezés négyzetét:
$\left(\sqrt{x^2 - 6x + 9}\right)^2 = (1 - 3x)^2$	$x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$
Ebből azt kapjuk, hogy:	Behelyettesítve az eredeti egyenletbe:
$x^2 - 6x + 9 = 1 - 6x + 9x^2$	$\left(\sqrt{(x - 3)^2}\right) = 1 - 3x$
$8x^2 = 8$	A gyök és a négyzet semlegesítik egymást.
$x^2 = 1$	$x - 3 = 1 - 3x$
$x_{1,2} = \pm 1$	$4x = 4$
A négyzetre emelés miatt szükséges az ellenőrzés:	$x = 1$
$\left(\sqrt{(-1)^2 - 6 \cdot (-1) + 9}\right)^2 = 1 - 3 \cdot (-1)$	Mivel a megoldás során nem emeltünk négyzetre, nem szükséges a helyettesítés ellenőrzése.

ami igaz ($4 = 4$) és $\left(\sqrt{1^2 - 6 \cdot 1 + 9}\right)^2 = 1 - 3 \cdot 1$ ami hamis ($2 \neq -2$) <u>válasz</u> : $x = -1$.	Válasz: $x = 1$.
---	-------------------

Az ilyen és ehhez hasonló példákön felbuzdulva engedtem meg én is a hibázást az egyik órámön. A feladat a következő volt [20]:

Egy deltoid köré kör írható. Számítsd ki a deltoidba írható kör sugarát, ha tudjuk, hogy a deltoid két különböző oldala 12 és 5 cm hosszúságú.

Az egyik diák lelkesen jelentkezett, kérte, hadd oldja meg a táblánál a feladatot. Rajza és indoklása a következő volt (40. ábra):



40. ábra

Legyen $AC = AD = 5$ cm

$$CB = DB = 12 \text{ cm.}$$

Mivel a deltoid köré kör írható, a kör középpontja rajta van a deltoid AB szimmetriatengelyén. Thalesz tétele alapján az $ACB\Delta$ és $ADB\Delta$ derékszögű. Pitagorasz tétele alapján:

$$AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{25 + 144} = 13 \text{ (cm)}$$

Tudjuk, hogy DC felezi az ACB szöget, vagyis ACD és BCD szögek 45° -osak. Mivel $AC = AD$, a $DAC\Delta$ egyenlőszárú, tehát az alapnál fekvő szögei egyenlők:

$$ACD \text{ szög} = ADC \text{ szög} = 45^\circ.$$

A háromszög belső szögeinek összege 180° , amiből következik, hogy DAC szög $= 90^\circ$.

$$\text{Pitagorasz tétele alapján: } DC = \sqrt{AD^2 + AC^2} = \sqrt{25 + 25} = 5\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

Mivel E felezi a DC átlót, ezért:

$$DE = EC = 2,5\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

A megoldás többi része a példa szempontjából nem releváns. A lényege az volt, hogy $AEC \Delta$ -ben a Pitagorasz-tétel alapján számolta ki AE befogót, BE hosszát pedig AB és AE különbségéből. Majd $ADCA$ és $DBC\Delta$ területének összeadásával megkapta az $ADBC$ deltoid területét. Amiből az érintőnéyszögekre felírt

$$T = \frac{k}{2} \cdot r$$

összefüggésből (ahol T – a négyszög területe, k – a kerülete, r – a beírt kör sugara) kiszámította a sugarat.

Annak ellenére, hogy egy elég súlyos hibát követett el, az osztály szó nélkül leírta a megoldást – senki sem vette észre a hibát. Ezután azt mondtam, játszunk tovább a feladattal.

Mivel a deltoid szimmetriatengelye az AB, ezért nyilván CBDA is szimmetrikus, azaz egyenlőszárú. A háromszög alapszögei tehát egyenlők: DCB szög = BDC szög = 45° , amiből azt kapjuk, hogy DBC szög = 90° .

Pitagorasz tétele alapján:

$$DC = \sqrt{DB^2 + BC^2} = \sqrt{144 + 144} = 2\sqrt{12} \text{ (cm)}$$

De hogyan lehet az, hogy ADC Δ -ból és BDC Δ -ból kiszámolva DC-t más-más értékeket kapunk? Hol a hiba?

Itt már elkezdtek mozgolódni, és pár percen belül több ember is rájött, hogy annak ellenére, hogy a rajzon „úgy látszik”, a deltoid kisebbik átlója mégsem felezi a szöget.

Sokan azt mondhatják, az említett hiba a deltoid átlóinak egy olyan triviális tulajdonságából ered, amit mindenkinek tudni kell, s ennek igazat is kell adnom. A gyakorlat azonban mégis azt mutatja, hogy a szemlélet gyakran megtéveszti a diákokat, és mert az aktuális rajzon úgy látják, ezért nem gondolnak bele abba, hogy a deltoid általában nem ilyen. Persze, ha lett volna legalább egy diák, aki tudta volna... de sajnos a tapasztalat azt mutatja, hogy néha még egy olyan diák sincs. Összességében azt gondolom tehát, hogy érdemes volt végigvinni a feladatmegoldó tanuló gondolatát, mert a hibakeresés során mindenki nyert: aki megtalálta a hibát, az a felfedezés öröme, aki pedig nem, az újra átnézte a feladatot, gondolkodott rajta, újra beleélte magát, s így társai magyarázata alapján meg is értette azt.

VII. Összefoglalás

Dolgozatomban a Pitagorasz-tétel egyik átdarabolásos bizonyításából indultam ki (melyet játékos formában dolgoztam fel), és hasonló meggondolással mutattam be a koszinusztétel egy nem közismert bizonyítását. A Pitagorasz-tétel említett bizonyítása során szerzett pozitív tapasztalataim azt mutatják, a koszinusztétel ezen átdarabolásos bizonyítása a diákok számára is érdekfeszítőbb lehet a szokásos skalárszorzos igazolásnál. Ráadásul ez a bizonyítás még inkább rámutat a tényre, miszerint a Pitagorasz-tétel a koszinusztétel egy speciális esete.

A csuklós sokszögekről szóló fejezetet a háromszögek és négyszögek egyes tulajdonságainak tapasztalati úton történő megismertetésére szántam. A fejezetben konkrét gyakorlati feladatokon keresztül a felfedezettő matematika módszerének segítségével mutattam be az egyes tulajdonságokat. A feladatok főként kevés előismerettel rendelkező általános iskolás tanulóknak szólnak, de közülük néhányat precíz bizonyítással közöltem, a középiskolai korosztályt célozva meg ezzel.

A téglalap és négyzet négyzetekre való átdarabolásáról szóló fejezetemet a matematika iránt fokozottan érdeklődő tanulók számára írtam. A négyzet nem tökéletes darabolásának bemutatása során célom az volt, hogy az egyéni darabolások során szerzett tapasztalatokat a diákok saját maguk fogalmazzák meg, kimondva ezzel a megfelelő tételt. A tökéletes darabolásokról szóló fejezetben pedig egy egyszerű algebrai eljárás segítségével történő darabolást mutattam be.

A feladatmegoldásokról szóló fejezetben saját, fokozottan nehezedő feladatokon keresztül mutattam be a felfedezettő matematikai problémamegoldás Pólya György által fontosnak tartott fő lépéseit. Mivel a Pitagorasz-tétellel már az első fejezetben is foglalkoztam, ezért ebben a fejezetben, továbblépési lehetőségként is e témakörre építettem fel a feladataimat. Minden feladatszöveg megalkotásánál nagy figyelmet fordítottam arra, hogy egy valós életből vett problémát tartalmazzon a feladat.

Írásom végén, mintegy lezárásként külön kitérek a problémamegoldás során ejtett hibák jelentőségére.

Konklúzióként őszintén elmondhatom, hogy kezdeti feltevésem, miszerint a felfedezettő matematika módszere motiváló hatású és érdekfeszítő, munkám során teljes

mértékben beigazolódott. Nem állítom, hogy ez az egyetlen helyes út a matematika oktatásában, de nem hiszem, hogy van egyáltalán ilyen, a lényeg az, hogy mindenki megtalálja a saját útját, amiben hitelesen tud mozogni, s amellyel leginkább át tudja adni e gyönyörű tudomány minden szépségét, s ami a legfontosabb: a szeretését.

VIII. Idézett forrásmunkák

- [1] Pukánszky Béla; Németh András, Neveléstörténet, Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó, 1996.
- [2] Pálfalvi Józsefné, Matematika didaktikusan, Budapest: Typotex, 2000..
- [3] Réti Mónika, „Felfedezettő tanulás. Új utakon a természettudomány-tanítás megújítása felé,” *Magyar Tudomány*, p. <http://www.matud.iif.hu/2011/09/12.htm>, 2011.
- [4] Falus Iván, Didaktika, Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó, 2003, p. 251..
- [5] Pólya György, A gondolkodás iskolája, Budapest: Gondolat Kiadó, 1977.
- [6] K. Gravemeijer; J. Terwel, „Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory,” *J. Curriculum Studies*, %1. kötet32., %1. szám6., pp. 777-796., 2000..
- [7] C. Neményi Eszter; Somfai Zsuzsa, „A matematika tantárgy helyzete és fejlesztési feladatai,” *Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet*, pp. <http://www.ofi.hu/tudastar/tantargyak-helyzete/matematika-tantargy>, 2009.
- [8] Gerőcs László, „Que vadis, matematikaoktatás? - avagy egy számtantanár skrupulusai,” *Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok*, pp. <http://www.komal.hu/hirek/vegyes/gerocslaszlo-quovadis.h.shtml>, 2007.
- [9] Kónya Anikó, „Mérő László a matematikatanításról. Mire való a matematika tanítása? Bölcsesség vagy fusztráció?” [Online]. Available: <http://www.vtamk.hu/magyar/oldalak/mero/>.
- [10] Kosztolányi József; Kovács István; Pintér Klára; Urbán János; Vincze István, Sokszínű Matematika 9, Szeged: Mozaik Kiadó, 2001, pp. 124-125..
- [11] Ábrahám Gábor; dr. Kosztolányiné Nagy Erzsébet; dr. Tóth Julianna, Matematika 9. osztály, Maxim Kiadó.
- [12] V. Zsolt, „A Pitagorasz-tételtől a párhuzamos szelők tételéig,” *A matematika tanítása*, pp. 3-7, május 2011.
- [13] Reiman István, A geomeria és határterületei, Budapest: Gondolat Kiadó, 1986, pp. 72-75..
- [14] [Online]. Available: <http://lexikon.fazekas.hu/147>. [Hozzáférés dátuma: 18 április 2013.].
- [15] [Online]. Available: <http://www.gottfriedville.net/mathprob/geom-divsquare.html>. [Hozzáférés dátuma: 19 április 2013.].

- [16] „<http://squaring.net/sq/tws.html>,” [Online].
- [17] Furdek Attila, „Új utak a matematika tanításában (3),” *A matematika tanítása*, pp. 9-14., március 2008..
- [18] Furdek Attila, „Új utak a matematikatanításban (2),” *A matematika tanítása*, pp. 13-16., január 2008..
- [19] Furdek Attila, „Krimi kilenc jelenetben,” *A matematika tanítása*, pp. 20-24, március 2007..
- [20] Árki Tamás; Konfárné Nagy Klára; Kovács István; Trembeczki Csaba; Dr. Urbán János, Sokszínű Matematika Feladatgyűjtemény 9, Szeged: Mozaik Kiadó, 2009, p. 57. .
- [21] Vízhányó Zsolt, „A Pitagorasz-tételtől a párhuzamos szelők tételéig,” *A matematika tanítása*, pp. 3-7, május 2011.

IX. Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Dr. Hegyvári Norbert tanár úrnak a szakdolgozatomhoz nyújtott sok-sok segítségéért, hasznos tanácsaiért, az átadott szaktudásért, tapasztalatokért és kedvességéért, mérhetetlen türelméért és őszinteségéért, valamint az egész féléves munkámba befektetett rengeteg energiájáért, illetve azért, hogy konzulensi feladatait messzemenően meghaladva támogatott munkám során.

Továbbá szeretném megköszönni férjemnek azt a mérhetetlen segítséget, kedvességet, megértést és biztatást, mellyel a dolgozatom írása közben végig támogatott. Illetve köszönöm azt a kritikus hozzáállását és fejlesztő hatású megjegyzéseit is, mellyel csak egy jogász tudja előremozdítani egy matematikatanár munkáját.